функции в этих точках: $y(0)=y(4)=3$. Построим точки (0; 3) и (4; 3).

5. Проведём параболу через построенные точки (рис. 54, *в*). ◁

По такой же схеме можно **построить график любой квадратичной функции** $y=ax^2+bx+c$:

1. Построить вершину параболы (x_0; y_0), вычислив x_0, y_0 по формулам $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=y(x_0)$.
2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы.
3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.
4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные относительно её оси. Для этого надо взять две точки на оси Ox, симметричные относительно точки x_0, и вычислить соответствующие значения функции (эти значения одинаковы). Например, можно построить точки параболы с абсциссами $x=0$ и $x=2x_0$, если $x_0\neq 0$ (ординаты этих точек равны c).
5. Провести через построенные точки параболу.

Заметим, что для более точного построения графика полезно найти ещё несколько точек параболы.

Задача 2. Построить график функции $y=-2x^2+12x-19$.

▶ 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{12}{-4}=3,$$

$$y_0=-2\cdot 3^2+12\cdot 3-19=-1.$$

Построим точку (3; −1) — вершину параболы (рис. 55).

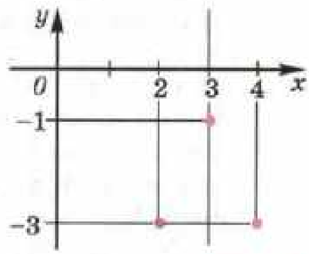


Рис. 55

2. Проведём через точку (3; −1) ось симметрии параболы (рис. 55).

3. Решая уравнение $-2x^2+12x-19=0$, убеждаемся, что действительных корней нет, и поэтому парабола не пересекает ось Ox.

4. Возьмём две точки на оси Ox, симметричные относительно точки $x=3$, например точки $x=2$ и $x=4$. Вычислим значение функции в этих точках: $y(2)=$ $=y(4)=-3$.

Построим точки (2; −3) и (4; −3) (рис. 56).

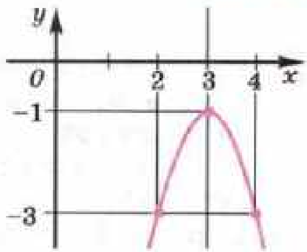


Рис. 56

5. Проведём параболу через построенные точки. ◁

Задача 3. Построить график функции $y=-x^2+x+6$ и выяснить, какими свойствами обладает эта функция.

► Для построения графика найдём нули функции: $-x^2+x+6=0$, откуда $x_1=-2$, $x_2=3$. Координаты вершины параболы можно найти так:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2+3}{2}=0{,}5,$$

$$y_0=y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+6=6{,}25.$$

Так как $a=-1<0$, то ветви параболы направлены вниз. Найдём ещё несколько точек параболы: $y(-1)=4$, $y(0)=6$, $y(1)=6$, $y(2)=4$. Строим параболу (рис. 57).

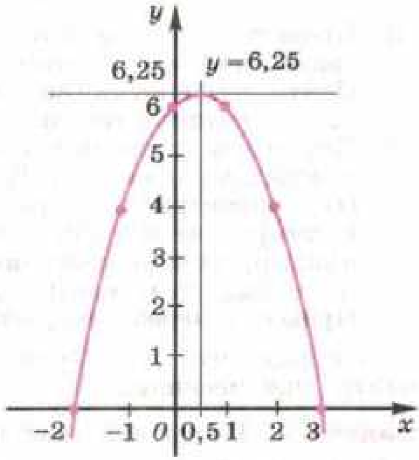


Рис. 57

С помощью графика получим следующие **свойства функции** $y=-x^2+x+6$:

1) При любых значениях x значения функции меньше или равны 6,25.

2) Значения функции положительны при $-2<x<3$, отрицательны при $x<-2$ и при $x>3$, равны нулю при $x=-2$ и $x=3$.

3) Функция возрастает на промежутке $x\leqslant 0{,}5$, убывает на промежутке $x\geqslant 0{,}5$.

4) При $x=0{,}5$ функция принимает наибольшее значение, равное 6,25.

5) График функции симметричен относительно прямой $x=0{,}5$. ◁

! Отметим, что функция $y=ax^2+bx+c$ принимает **наименьшее** или **наибольшее значение** в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$, которая является абсциссой вершины параболы.

Значение функции в точке x_0 можно найти по формуле $y_0=y(x_0)$.

Если $a>0$, то функция имеет наименьшее значение, а если $a<0$, то функция имеет наибольшее значение.

Например, функция $y=x^2-4x+3$ при $x=2$ принимает наименьшее значение, равное -1 (рис. 54, *в*); функция $y=-2x^2+12x-9$ при $x=3$ принимает наибольшее значение, равное 9.

Задача 4. Сумма двух положительных чисел равна 6. Найти эти числа, если сумма их квадратов наименьшая. Каково наименьшее значение суммы квадратов этих чисел?

► Обозначим первое число буквой x, тогда второе число равно $6-x$, а сумма их квадратов равна $x^2+(6-x)^2$. Преобразуем это выражение:

$$x^2+(6-x)^2=x^2+36-12x+x^2=2x^2-12x+36.$$

Задача свелась к нахождению наименьшего значения функции $y=2x^2-12x+36$. Найдём координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\cdot 2}=3,\quad y_0=y(3)=2\cdot 9-12\cdot 3+36=18.$$

Итак, при $x=3$ функция принимает наименьшее значение, равное 18. Таким образом, первое число равно 3, второе также равно $6-3=3$. Значение суммы квадратов этих чисел равно 18.

Ответ. 3 и 3; 18. ◁

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать алгоритм построения графика квадратичной функции по опорным точкам.
2. Перечислить свойства квадратичной функции, график которой изображён: 1) на рисунке 54, *в*; 2) на рисунке 56.
3. Наибольшее или наименьшее значение принимает функция $y=ax^2+bx+c$ в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$, если $a<0$; $a>0$?
4. Как найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y=ax^2+$ $+bx+c$?

Вводные упражнения

1. Дана функция $y(x)=2x^2+5x-3$. Найти: $y(0)$; $y(1)$; $y(-3)$; $y\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Через какую точку оси абсцисс проходит ось симметрии графика функции:
   1) $y=3x^2-5x-7$; 2) $y=5x^2-x$; 3) $y=x^2-1$; 4) $y=2{,}5x^2$?

3. Найти нули функции:

1) $y = 15x^2 - 5x$; 2) $y = 16x^2 - 100$;

3) $y = -6x^2 - x + 1$; 4) $y = 2x^2 + 3x - 7$.

4. С помощью графика квадратичной функции, изображённого на рисунке 58, ответить на вопросы:

1) при каких значениях x функция принимает положительные значения; отрицательные значения;

2) на каком промежутке функция возрастает; убывает;

3) в каких точках график функции пересекает оси координат?

5. Записать:

1) квадрат суммы чисел a и b;

2) сумму квадратов чисел a и b;

3) произведение разности чисел a и b на их сумму;

4) частное разности квадратов чисел a и b и суммы кубов этих чисел.

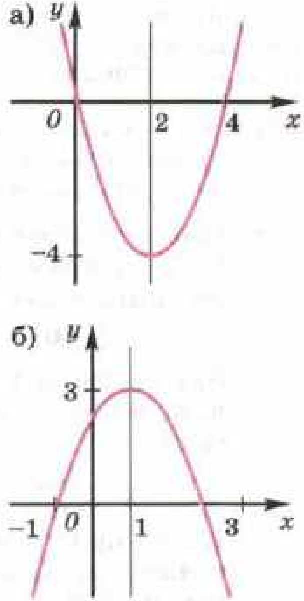


Рис. 58

Упражнения

621. Найти координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = x^2 + 3x + 5$;

3) $y = -x^2 - 2x + 5$; 4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

622. Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

1) $y = x^2 - 3x + 5$; 2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;

3) $y = -2x^2 + 6$; 4) $y = 7x^2 + 14$.

623. По данному графику квадратичной функции (рис. 59) выяснить её свойства.

Построить график функции и по графику: 1) найти значения x, при которых значения функции положительны; отрицательны; 2) найти промежутки возрастания и убывания функции; 3) выяснить, при каком значении x функция принимает наибольшее или наименьшее значение; найти его **(624—625)**.

624. 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = -x^2 + x + 2$;

3) $y = -x^2 + 6x - 9$; 4) $y = x^2 + 4x + 5$.

625. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$; 2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;

3) $y = -2x^2 + 3x + 2$; 4) $y = 3x^2 - 8x + 4$;

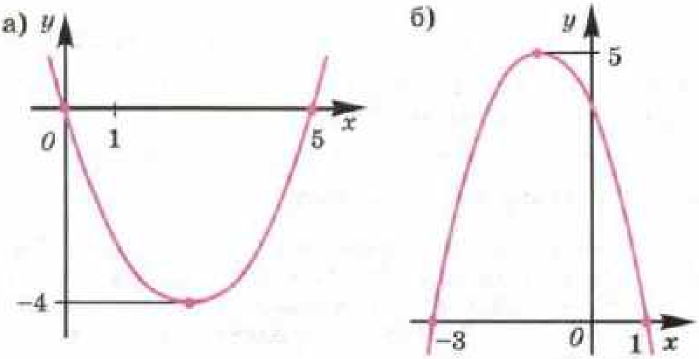


Рис. 59

5) $y = 4x^2 + 12x + 9$; 6) $y = -4x^2 + 4x - 1$;
7) $y = 2x^2 - 4x + 5$; 8) $y = -3x^2 - 6x - 4$.

626. Число 15 представить в виде суммы двух чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.

627. Сумма двух чисел равна 10. Найти эти числа, если сумма их кубов является наименьшей.

628. Участок прямоугольной формы, примыкающий к стене дома, требуется огородить с трёх сторон забором длиной 12 м. Какими должны быть размеры участка, чтобы площадь его была наибольшей?

629. В треугольнике сумма основания и высоты, опущенной на это основание, равна 14 см. Может ли такой треугольник иметь площадь, равную 25 см^2?

630. Не строя график, определить, при каком значении x квадратичная функция имеет наибольшее (наименьшее) значение; найти это значение:
1) $y = x^2 - 2x - 4$; 2) $y = -x^2 + 4x + 3$; 3) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

631. Определить знаки коэффициентов уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$, если:
1) ветви параболы направлены вверх, абсцисса её вершины отрицательна, а ордината положительна;
2) ветви параболы направлены вниз, абсцисса и ордината её вершины отрицательны.

632. Построить график функции:
1) $y = |2x^2 - x - 1|$; 2) $y = x^2 - 5|x| - 6$.

633. С высоты 5 м вертикально вверх из лука выпущена стрела с начальной скоростью 50 м/с. Высота h метров, на которой находится стрела через t секунд, вычисляется по формуле

$h = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$. Через сколько секунд стрела: 1) достигнет наибольшей высоты и какой; 2) упадёт на землю? Значение g принять равным 10 м/с^2.

Разговор о важном

Функции, заданные на промежутках

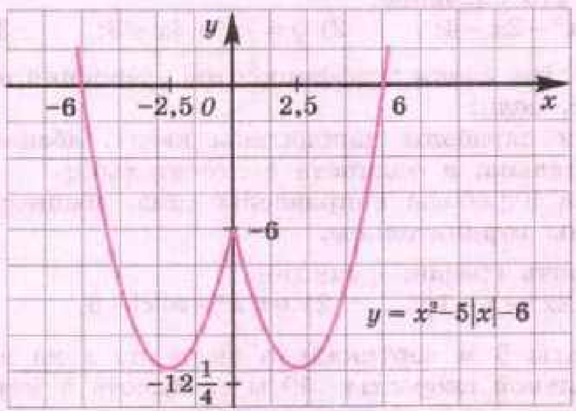
Профессор, я снова обращаюсь за помощью. При выполнении упражнения 632(1) у меня не возникло никаких проблем, так как уже научилась строить график функции $y = |ax^2 + bx + c|$. Но нет уверенности, что я правильно построила график функции $y = x^2 - 5|x| - 6$.

Главное — понять, что на промежутках $x < 0$ и $x \geqslant 0$ формулы, задающие функцию, будут разными. Можно нашу функцию задать так:

$$y = \begin{cases} x^2 - 5x - 6, \text{ если } x \geqslant 0, \\ x^2 + 5x - 6, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

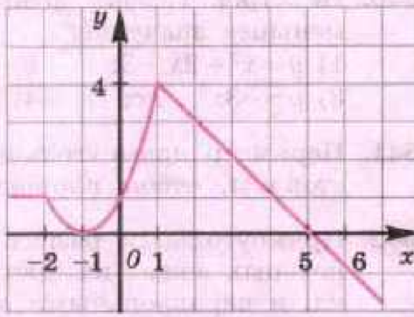
Значит, я в тетради верно построила график заданной функции.

Так как $x^2 = |x|^2$, нашу функцию можно записать в виде $y = |x|^2 - 5|x| - 6$. Отсюда становится очевидно, что при любом $x_0 < 0$ соответствующее ему значение функции будет таким же, как и при положительном значении аргумента, равном $-x_0$. При $x_0 = 0$ значение функции $y = -6$. Поэтому график данной функции можно получить так: построить его часть для $x \geqslant 0$ (т. е. график функции $y = x^2 - 5x - 6$ при $x \geqslant 0$) и отразить полученную часть параболы симметрично относительно оси Oy. Потренируйтесь в применении этого способа для построения графиков функций: $y = x^2 + 4|x| - 5$; $y = x^2 - 4|x| + 3$.



Профессор, приведите, пожалуйста, ещё пример функции, заданной на разных промежутках различными формулами, но не содержащую аргумент под знаком модуля.

Я приведу тебе пример, а ты, пожалуйста, сам сконструируй функции, заданные на промежутках, и построй их графики. Вот мой пример:



$$y=\begin{cases}1, \text{ если } x<-2,\\ (x+1)^2, \text{ если } -2\leqslant x<1,\\ 5-x, \text{ если } x\geqslant 1.\end{cases}$$

График этой функции изображён на рисунке.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

634. Найти значения x, при которых квадратичная функция $y=2x^2-5x+3$ принимает значение, равное:
1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) −1.

635. Найти координаты точек пересечения графиков функций:
1) $y=x^2-4$ и $y=2x-4$; 2) $y=x^2-2x-5$ и $y=2x^2+3x+1$;
3) $y=x^2$ и $y=3x-2$; 4) $y=x^2+x-2$ и $y=(x+3)(x-4)$.

636. Решить неравенство: 1) $x^2\leqslant 5$; 2) $x^2>36$.

637. Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:
1) $y=x^2+x-12$; 2) $y=-x^2+3x+10$; 3) $y=-8x^2-2x+1$;
4) $y=7x^2+4x-11$; 5) $y=5x^2+x-1$; 6) $y=5x^2+3x-2$;
7) $y=4x^2-11x+6$; 8) $y=3x^2+13x-10$.

638. Найти координаты вершины параболы:
1) $y=x^2-4x-5$; 2) $y=-x^2-2x+3$; 3) $y=x^2-6x+10$;
4) $y=x^2+x+\frac{5}{4}$; 5) $y=-2x(x+2)$; 6) $y=(x-2)(x+3)$.

639. Построить график функции и по графику выяснить её свойства:
1) $y=x^2-5x+6$; 2) $y=x^2+10x+30$;
3) $y=-x^2-6x-8$; 4) $y=2x^2-5x+2$;
5) $y=-3x^2-3x+1$; 6) $y=-2x^2-3x-3$.

640. Не строя график функции, найти её наибольшее или наименьшее значение:

1) $y=x^2+2x+3$; 2) $y=-x^2+2x+3$;

3) $y=-3x^2+7x$; 4) $y=3x^2+4x+5$.

641. Периметр прямоугольника 600 м. Какими должны быть его стороны, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей?

642. Прямоугольник разбит на 3 части двумя отрезками, концы которых лежат на противоположных сторонах прямоугольника, и параллельными одной из его сторон. Сумма периметра прямоугольника и длин отрезков равна 1600 м. Найти стороны прямоугольника, если его площадь наибольшая.

643. Найти коэффициенты p и q функции $y=x^2+px+q$, если эта функция:

1) при $x=0$ принимает значение 2, а при $x=1$ — значение 3;

2) при $x=0$ принимает значение 0, а при $x=2$ — значение 6.

644. Найти p и q, если парабола $y=x^2+px+q$:

1) пересекает ось абсцисс в точках $x=2$ и $x=3$;

2) пересекает ось абсцисс в точке $x=1$ и ось ординат в точке $y=3$;

3) касается оси абсцисс в точке $x=2$.

645. При каких значениях x равны значения функций:

1) $y=x^2+3x+2$ и $y=|7-x|$;

2) $y=3x^2-6x+3$ и $y=|3x-3|$?

646. Построить параболу $y=ax^2+bx+c$, если известно, что:

1) парабола проходит через точки с координатами (0; 0), (2; 0), (3; 3);

2) точка (1; 3) является вершиной параболы, а точка (–1; 7) принадлежит параболе;

3) нулями функции $y=ax^2+bx+c$ являются числа $x_1=1$ и $x_2=3$, а наибольшее значение равно 2.

647. Найти значение k, при котором прямая $y=kx$ и парабола $y=x^2+4x+1$ имеют только одну общую точку.

648. Пусть прямая проходит через точку $(x_0;\ y_0)$ параболы $y=ax^2$ и точку $\left(\frac{x_0}{2};\ 0\right)$. Доказать, что эта прямая имеет только одну общую точку с параболой $y=ax^2$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В высшей математике параболу определяют как линию, состоящую из всех точек N плоскости, расстояние от каждой из которых до точки F (фокуса параболы) равно расстоянию до заданной прямой l, называемой *директрисой* параболы (рис. 60). Это определение позволяет сконструировать прибор, способный вычерчивать параболу. Предлагаем изготовить его в соответствии со следующим описанием. На листе картона (рис. 61) закрепите линейку (её верхний край будет директрисой будущей параболы). В точке F булавкой зафиксируйте конец нити. Другой конец этой нити закрепите в вершине A острого угла чертёжного угольника. Длина нити должна быть равна длине катета AC. Перемещая катет BC вдоль линейки и прижимая нить грифелем карандаша к катету AC угольника, вы получите кривую, точки которой находятся на равных расстояниях от точки F и от края линейки, т. е. получите параболу.
2. Для орошения земель строят каналы различных форм и размеров. Пусть проектируется канал, сечение которого имеет прямоугольную форму (рис. 62), а смачивающийся периметр $(AB + BC + CD)$ равен 20 м. Какими должны быть стороны сечения, чтобы пропускная способность канала была наибольшей?
3. Каким уравнением при проектировании должна быть задана мостовая арка, имеющая форму параболы (рис. 63), если пролёт арки OA должен быть равен 48 м, а высота BC — 8 м?

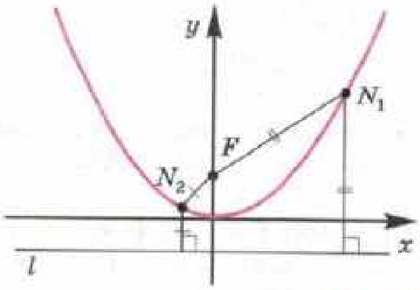


Рис. 60

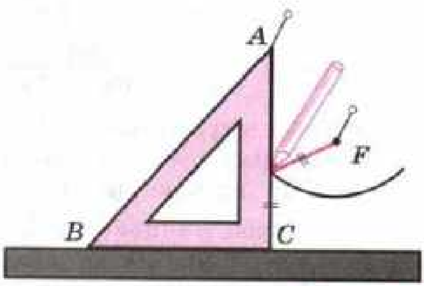


Рис. 61

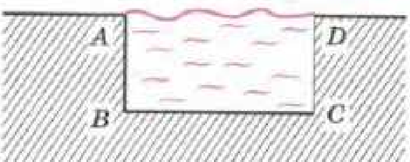


Рис. 62

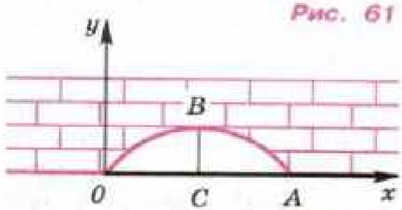


Рис. 63

4. Кольцо имеет радиус внешнего круга 3 см, а радиус внутреннего — x см. Записать формулу, выражающую зависимость площади кольца S от радиуса внутреннего круга. Построить график зависимости S от x, приняв $\pi = 3$, если $1 \leqslant x \leqslant 2$.

5. Три бригады должны выполнить работу по изготовлению одинаковых деталей. Первая бригада в день делает 200 деталей. Вторая бригада делает в день на x деталей меньше, чем первая $(0 < x < 200)$, а третья бригада делает в день на $5x$ деталей больше, чем первая. Сначала первая и вторая бригады, работая вместе, выполнили $\frac{1}{5}$ часть всей работы, а затем все три бригады, работая вместе, выполнили оставшуюся часть работы. Найти такое значение x, при котором вся работа была бы выполнена указанным способом как можно быстрее.

Решение. Из условия следует, что вторая бригада делает в день $(200 - x)$ деталей, а третья $(200 + 5x)$ деталей. Пусть A — количество всех деталей, которое нужно сделать, тогда

$t_1 = \dfrac{\frac{A}{5}}{400 - x}$ — время совместной работы первой и второй бригад,

$t_2 = \dfrac{\frac{4A}{5}}{600 + 4x}$ — время совместной работы всех трёх бригад.

Время работы указанным способом равно

$$t_1 + t_2 = \frac{\frac{A}{5}}{400 - x} + \frac{\frac{4A}{5}}{600 + 4x} = \frac{A}{5} \cdot \frac{600 + 4x + 4(400 - x)}{(400 - x)(600 + 4x)} =$$

$$= \frac{A}{5} \cdot \frac{2200}{-4x^2 + 1000x + 240\,000} = A \cdot \frac{110}{-x^2 + 250x + 60\,000}.$$

Очевидно, что значение $t_1 + t_2$ будет минимальным, когда знаменатель дроби $-x^2 + 250x + 60\,000$ примет своё наибольшее значение. Это произойдёт при $x = 125$.

6. Первая труба наливает в бассейн 30 м^3 воды в час. Вторая труба наливает в час на $2d$ м^3 меньше, чем первая $(0 < d < 15)$, а третья труба наливает в час на $11d$ м^3 больше, чем первая. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают $\frac{2}{11}$ бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшуюся часть бассейна. При каком значении d бассейн быстрее всего наполнится водой указанным способом?

7. Автомобиль едет из пункта A в пункт B. От пункта A до пункта C, расположенного между пунктами A и B, он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте C он уменьшает свою скорость на

a км/ч ($0 < a < 48$) и с этой скоростью едет $\frac{1}{3}$ пути от пункта C до пункта B. Оставшуюся часть пути он едет со скоростью, которая на $2a$ км/ч превышает первоначальную скорость. При каком значении a автомобиль быстрее всего проделает путь от пункта C до пункта B?

В этой главе вы узнали,

что такое:

— квадратичная функция;
— нули квадратичной функции;
— парабола;
— ось симметрии параболы;
— вершина параболы;
— промежутки возрастания и убывания квадратичной функции;
— сжатие параболы к оси Ox вдоль оси Oy;
— растяжение параболы от оси Ox вдоль оси Oy;
— сдвиг (параллельный перенос) параболы вдоль координатных осей;
— уравнение параболы;

как:

— находить координаты вершины параболы;
— определять направление ветвей параболы;
— по графику находить промежутки возрастания и убывания функции;
— находить наименьшее или наибольшее значение квадратичной функции;
— строить график квадратичной функции двумя способами, с помощью сдвигов вдоль координатных осей; с помощью опорных точек.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Построить график функции $y = x^2 - 6x + 5$ и найти её наименьшее значение.
2. С помощью графика функции $y = -x^2 + 2x + 3$ найти значения x, при которых значение функции равно 3.
3. По графику функции $y = 1 - x^2$ найти значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

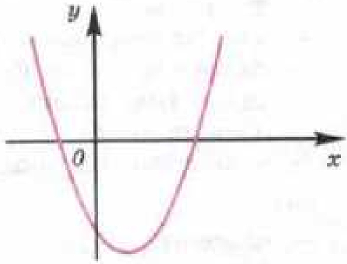
II уровень

4. При каких значениях x функция $y=2x^2$ возрастает; убывает? Построить график этой функции.
5. Найти координаты вершины параболы $y=(x-3)^2$ и построить её график.
6. Нулями квадратичной функции $y=x^2+px+q$ являются числа −6 и 1. Найти абсциссу вершины параболы (графика этой функции) и ординату точки её пересечения с осью Oy.
7. Построить график функции $y=(x-1)(x+2)$. Найти промежутки возрастания и убывания этой функции.
8. Найти наибольшее значение функции $y=-2x^2+9x-4$.
9. Построить график функции, заданной на промежутках:

$$y=\begin{cases} x^2+2x-3, \text{ если } x<1, \\ x-1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

III уровень

10. Записать уравнение параболы, если координаты её вершины (2; 4) и она проходит через точку (−1; −5).
11. На рисунке изображён эскиз графика функции $y=ax^2+bx+c$. Определить знаки чисел a, b и c.



12. Построить график функции:
а) $y=|x^2-4x+3|$;
б) $y=x^2-|x|-2$.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Квадратичная функция в физике.
2. Квадратичная функция в астрономии.
3. Квадратичная функция в строительстве и архитектуре.
4. Оптимизационные задачи, решаемые с помощью исследования квадратичной функции.
5. Построение графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля.
6. Г. Галилей и его вклад в математическое моделирование законов динамики.
7. Конические сечения и их оптические свойства.
8. Компьютерные программы для исследования квадратичной функции.
9. Компьютерное моделирование процессов, протекающих по законам квадратичной зависимости.

ГЛАВА VI

Квадратные неравенства

При изучении линейных неравенств мы говорили о том, что в практической деятельности, в экспериментальных и теоретических исследованиях задачи решения неравенств встречаются не реже, чем задачи решения уравнений. К решению различных неравенств часто приводят практические и прикладные задачи.

Моделями многих практических, теоретических и прикладных задач являются различные неравенства. Рассмотрим два примера. При разведении животных в заповеднике планируют прирост численности изолированной популяции N, который определяется формулой

$$N = k_1 n - k_2 n^2,$$

где n — исходное количество членов популяции, коэффициент k_1 описывает рост популяции за счёт преобладания рождаемости над смертностью, а коэффициент k_2 учитывает так называемый *эффект тесности* и ограниченность ресурсов среды обитания. При этом важным оказывается поддержание численности популяции на определённом уровне, поэтому приходится решать неравенство

$$k_1 n - k_2 n^2 \leqslant N_0, \qquad (1)$$

где N_0 — запланированный прирост.

Для артиллеристов задача определения времени t, за которое выпущенный со скоростью v_0 снаряд будет находиться в заданном по высоте коридоре $(h_1 ; h_2)$, в годы войны была распространённой. Для этого решались неравенства

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} > h_1 \text{ и } v_0 t - \frac{gt^2}{2} < h_2. \qquad (2)$$

Неравенства видов (1) и (2) называют *квадратными неравенствами*. В неравенстве (1) неизвестным является n, а в неравенствах (2) — число t.

В этой главе вы познакомитесь с различными способами решения квадратных неравенств. Научитесь также решать неравенства, в левой части которых находится произведение линейных множителей, а в правой части — нуль. Решение таких неравенств будет осуществляться с помощью *метода интервалов*.

§ 40 Квадратное неравенство и его решение

В начале этого учебного года вы научились решать линейные неравенства с одним неизвестным и их системы. Недавно овладели приёмами решения квадратных уравнений. В этом параграфе будет введено понятие квадратного неравенства и рассмотрены примеры решения неравенств, для которых соответствующее квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня. В таком случае решение квадратного неравенства сводится к решению систем линейных неравенств.

Нужно вспомнить:

- разложение квадратного трёхчлена на множители;
- решение линейных неравенств и их систем;
- условие равенства произведения двух множителей положительному числу; отрицательному числу;
- формулы корней квадратного уравнения;
- свойства деления обеих частей неравенства на одно и то же число.

Задача 1. Стороны прямоугольника равны 2 и 3 дм. Каждую сторону увеличили на одинаковое число дециметров так, что площадь прямоугольника стала больше 12 дм². Как изменилась каждая сторона?

▶ Пусть каждая сторона прямоугольника увеличена на x дециметров. Тогда стороны нового прямоугольника равны $(2+x)$ и $(3+x)$ дециметрам, а его площадь равна $(2+x)(3+x)$ квадратным дециметрам. По условию задачи $(2+x)(3+x)>12$, откуда $x^2+5x+6>12$, или $x^2+5x-6>0$.

Разложим левую часть этого неравенства на множители:

$$(x+6)(x-1)>0.$$

Так как по условию задачи $x>0$, то $x+6>0$. Поделив обе части неравенства на положительное число $x+6$, получим $x-1>0$, т. е. $x>1$.

Ответ. Каждую сторону прямоугольника увеличили больше чем на 1 дм. ◁

В неравенстве $x^2+5x-6>0$ буквой x обозначено неизвестное число. Это пример квадратного неравенства.

Если в левой части неравенства стоит квадратный трёхчлен, а в правой — нуль, то такое **неравенство** называют **квадратным**.

Например, неравенства $2x^2-3x+1\geqslant 0$, $-3x^2+4x+5<0$ являются квадратными.

Напомним, что **решением неравенства** с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство. **Решить неравенство** — значит найти все его решения или установить, что их нет.

Задача 2. Решить неравенство $x^2-5x+6>0$.

► Квадратное уравнение $x^2-5x+6=0$ имеет два различных корня $x_1=2$, $x_2=3$. Следовательно, квадратный трёхчлен x^2-5x+6 можно разложить на множители:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Поэтому неравенство можно записать так: $(x-2)(x-3)>0$. Произведение двух множителей положительно, если они имеют одинаковые знаки.

1) Рассмотрим случай, когда оба множителя положительны, т. е. $x-2>0$ и $x-3>0$. Эти неравенства образуют систему: $\begin{cases}x-2>0,\\x-3>0.\end{cases}$ Решая систему, получаем $\begin{cases}x>2,\\x>3,\end{cases}$ откуда $x>3$.

2) Рассмотрим случай, когда оба множителя отрицательны, т. е. $x-2<0$ и $x-3<0$. Эти неравенства образуют систему: $\begin{cases}x-2<0,\\x-3<0.\end{cases}$ Решая систему, получаем $\begin{cases}x<2,\\x<3,\end{cases}$ откуда $x<2$.

Таким образом, решениями неравенства $(x-2)(x-3)>0$, а значит, и исходного неравенства $x^2-5x+6>0$ являются числа $x<2$, а также числа $x>3$.

Ответ. $x<2$, $x>3$. ◁

Вообще если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня, то решение квадратных неравенств $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c<0$ можно свести к решению системы неравенств первой степени, разложив левую часть квадратного неравенства на множители.

Задача 3. Решить неравенство $-3x^2-5x+2>0$.

► Чтобы удобнее проводить вычисления, представим данное неравенство в виде квадратного неравенства с положительным первым коэффициентом. Для этого умножим обе его части на -1:

$$3x^2+5x-2<0.$$

Найдём корни уравнения $3x^2+5x-2=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6},\quad x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=-2.$$

Разложив квадратный трёхчлен на множители, получим:

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0.$$

Отсюда получаем две системы: $\begin{cases} x-\frac{1}{3}>0, \\ x+2<0, \end{cases}$ и $\begin{cases} x-\frac{1}{3}<0, \\ x+2>0. \end{cases}$

Первую систему можно записать так: $\begin{cases} x>\frac{1}{3}, \\ x<-2, \end{cases}$ откуда видно, что она не имеет решений.

Решая вторую систему, находим: $\begin{cases} x<\frac{1}{3}, \\ x>-2, \end{cases}$ откуда $-2<x<\frac{1}{3}$.

Отсюда следует, что решениями неравенства

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0,$$

т. е. неравенства $-3x^2-5x+2>0$, являются все числа интервала $\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$.

Ответ. $-2<x<\frac{1}{3}$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Какое неравенство называют квадратным?
2. Что называют решением неравенства?
3. Что значит решить неравенство?
4. На основании какого свойства умножения чисел составлены системы линейных неравенств при решении задачи 2; задачи 3?
5. Как называются промежутки чисел, являющихся решениями неравенства в задаче 2; в задаче 3?

Вводные упражнения

1. Разложить на множители многочлен:

1) $3x^2-2x$; 2) $5x-x^2$; 3) x^2-2x-3;
4) x^2-5x-6; 5) x^2-100; 6) $4x^2-25$.

2. Сравнить с нулём значение выражения:

1) $x+2$, если $x>0$; 2) $-2x$, если $x>0$; 3) $-x+1$, если $x<0$.

3. Обе части неравенства умножить (разделить) на число a:

1) $x>-2$, $a=3$; 2) $x>2$, $a=-3$;

3) $x<3$, $a=-3$; 4) $x<-3$, $a=3$.

4. Решить неравенство: 1) $2x+1>-5$; 2) $3-4x<7$.

5. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} x<1, \\ x<-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>3, \\ x>-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x>3, \\ x<2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x>3, \\ x<4. \end{cases}$

6. Определить знак произведения, если $x>0$:

1) $(x+1)(x+3)$; 2) $(-x-1)(x+2)$.

Упражнения

649. (Устно.) Указать, какие из следующих неравенств являются квадратными:

1) $x^2-4>0$; 2) $x^2-3x-5\leqslant 0$; 3) $3x+4>0$;

4) $4x-5<0$; 5) $x^2-1\leqslant 0$; 6) $x^4-16>0$.

650. Свести к квадратным следующие неравенства:

1) $x^2<3x+4$; 2) $3x^2-1>x$;

3) $3x^2<x^2-5x+6$; 4) $2x(x+1)<x+5$.

651. (Устно.) Какие из чисел 0; –1; 2 являются решениями неравенства:

1) $x^2+3x+2>0$; 2) $-x^2+3{,}5x+2\geqslant 0$;

3) $x^2-x-2\leqslant 0$; 4) $-x^2+x+\frac{3}{4}<0$?

Решить неравенство (**652—654**).

652. 1) $(x-2)(x+4)>0$; 2) $(x-11)(x-3)<0$;

3) $(x-3)(x+5)<0$; 4) $(x+7)(x+1)>0$.

653. 1) $x^2-4<0$; 2) $x^2-9>0$; 3) $x^2+3x<0$; 4) $x^2-2x>0$.

654. 1) $x^2-3x+2<0$; 2) $x^2+x-2<0$; 3) $x^2-2x-3>0$;

4) $x^2+2x-3>0$; 5) $2x^2+3x-2>0$; 6) $3x^2+2x-1>0$.

655. Решить неравенство:

1) $2\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)^2>0$; 2) $7\cdot\left(\frac{1}{6}-x\right)^2\leqslant 0$;

3) $3x^2-3<x^2-x$; 4) $(x-1)(x+3)>5$.

656. Построить график функции:

1) $y=2x^2$; 2) $y=-(x+1,5)^2$;

3) $y=2x^2-x+2$; 4) $y=-3x^2-x-2$.

По графику найти все значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значения, равные нулю.

$\boxed{657.}$ Известно, что числа x_1 и x_2, где $x_1<x_2$, являются нулями функции $y=ax^2+bx+c$. Доказать, что если число x_0 заключено между x_1 и x_2, т. е. $x_1<x_0<x_2$, то выполняется неравенство $a(ax_0^2+bx_0+c)<0$.

$\boxed{658.}$ Из трёх последовательных натуральных чисел произведение первых двух меньше 72, а произведение последних двух не меньше 72. Найти эти числа.

Шаг вперёд

Дробно-линейные неравенства

Вы только что научились решать квадратные неравенства сведением их к решению систем линейных неравенств. Теперь решение дробно-линейных неравенств вам покажется совсем простым.

А какие неравенства называются дробно-линейными?

Дробно-линейными неравенствами называют такие неравенства, в которых слева от одного из знаков $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$ стоит выражение вида $\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}$ (где x — неизвестное; a_1, a_2, b_1 и b_2 — действительные числа), а справа — нуль.

Попробую привести примеры дробно-линейных неравенств: $\dfrac{2x}{5-x}<0$, $\dfrac{7x-1}{3x-8}\geqslant 0$, $\dfrac{9}{14-17x}<0$.

Хорошие примеры привела. Надеюсь, вы сами сформулируете алгоритм решения подобных неравенств, поняв, что оценка знака частного двух чисел аналогична оценке знака произведения двух множителей.

Думаю, что решение каждого из таких неравенств сведётся к решению двух систем линейных неравенств. Эти системы будут составлены с учётом того, что частное двух чисел положительно, когда делимое и делитель одного знака, и отрицательно, когда они имеют разные знаки.

Ты прав. А в случае решения нестрогого неравенства нужно рассмотреть и случай, при котором числитель дроби обратится в нуль.

Решим те неравенства, которые придумала Света в качестве примеров дробно-линейных неравенств.

Решу первое неравенство $\frac{2x}{5-x} < 0$. Дробь отрицательна, когда числитель и знаменатель имеют разные знаки. Значит, нужно решить две системы:

1) $\begin{cases} 2x < 0, \\ 5 - x > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x < 5, \end{cases}$ откуда $x < 0$; 2) $\begin{cases} 2x > 0, \\ 5 - x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x > 5, \end{cases}$ откуда $x > 5$.

Ответ. $x < 0$, $x > 5$.

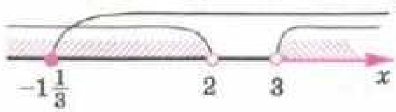
А решение второго неравенства $\frac{7x-1}{3x-8} \geqslant 0$ можно заменить решением таких систем:

$$\begin{cases} 7x - 1 \geqslant 0, \\ 3x - 8 > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 7x - 1 \leqslant 0, \\ 3x - 8 < 0? \end{cases}$$

Можно. Думаю, что решить их не составит труда. Решение же последнего неравенства: $\frac{9}{14-17x} < 0$ — легко выполнить устно: дробь с положительным числителем будет отрицательной, если отрицателен её знаменатель. То есть решениями исходного неравенства будут числа, удовлетворяющие неравенству $14 - 17x < 0$.

Системы неравенств с одним неизвестным, содержащие линейное и квадратное неравенства

Вы уже умеете решать линейные и квадратные неравенства, системы линейных неравенств. Попробуем решить систему, в которой одно неравенство линейное, а другое — квадратное: $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x + 4 \geqslant 0. \end{cases}$ Решениями первого неравенства, как было установлено в задаче 2 текста параграфа, являются все числа промежутков $x < 2$ и $x > 3$. Решениями второго неравенства будут числа промежутка $x \geqslant -1\frac{1}{3}$. Изобразим на одной числовой оси множества решений как первого, так и второго неравенств. Очевидно, что одновременно обоим неравенствам системы удовлетворяют числа из промежутков $-1\frac{1}{3} \leqslant x < 2$ и $x > 3$.



Эти числа и являются решениями исходной системы. Думаю, теперь вы самостоятельно сможете решить такие системы:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 < 0, \\ 4x + 9 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 \leqslant 0, \\ 2x + 7 < 0. \end{cases}$$

§ 41 Решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции

С идеей решения неравенств с помощью графиков вы уже знакомы. В своё время иллюстрировали на координатной плоскости решения линейных неравенств, в § 37 с помощью графиков решили неравенство $2x^2 > 8$.
Квадратичная функция задаётся формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Поэтому решение, например, квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ можно свести к отысканию нулей квадратичной функции, а затем промежутков, на которых соответствующая квадратичная функция принимает положительные значения.

Нужно вспомнить:

- понятие нулей квадратичной функции;
- зависимость от коэффициента a направления ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$;
- названия числовых промежутков, их символическую запись и изображение на числовой оси;
- формулы корней квадратного уравнения;
- расположение точки графика функции по отношению к оси абсцисс в зависимости от знака её ординаты.

Задача 1. Решить с помощью графика неравенство $2x^2 - x - 1 \leqslant 0$.

▶ График квадратичной функции $y = 2x^2 - x - 1$ — парабола, ветви которой направлены вверх. Выясним, имеет ли эта парабола точки пересечения с осью Ox, для чего решим квадратное уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4};\ x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

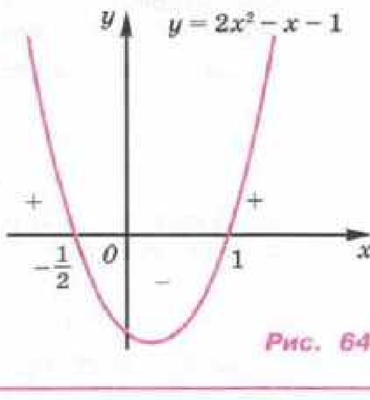


Рис. 64

Значит, парабола пересекает ось Ox в точках $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$. Неравенству $2x^2 - x - 1 \leqslant 0$ удовлетворяют те значения x, при которых значения функции равны нулю или отрицательны, т. е. те значения x, при которых точки параболы лежат на оси Ox или ниже. Из рисунка 64 видно, что этими значениями являются все числа из отрезка $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]$.

Ответ. $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. ◁

График этой функции можно использовать и при решении других неравенств, которые отличаются от данного только знаком неравенства. Из рисунка 64 видно, что:

1) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 < 0$ являются числа интервала $-\frac{1}{2} < x < 1$;
2) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 > 0$ являются все числа промежутков $x < -\frac{1}{2}$ и $x > 1$;
3) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 \geqslant 0$ являются все числа промежутков $x \leqslant -\frac{1}{2}$ и $x \geqslant 1$.

Задача 2. Решить неравенство $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

► Построим эскиз графика функции $y = 4x^2 + 4x + 1$. Ветви этой параболы направлены вверх. Уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ имеет один корень $x = -\frac{1}{2}$, поэтому парабола касается оси Ox в точке $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$. График этой функции изображён на рисунке 65.

Для решения данного неравенства нужно установить, при каких значениях x значения функции положительны. Таким образом, неравенству $4x^2 + 4x + 1 > 0$ удовлетворяют те значения x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox. Из рисунка 65 видно, что такими являются все действительные числа x, кроме $x = -0{,}5$.

Ответ. $x \neq -0{,}5$. ◁

Из рисунка 65 видно также, что:

1) решениями неравенства
$$4x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$$
являются все действительные числа;
2) неравенство $4x^2 + 4x + 1 \leqslant 0$ имеет одно решение $x = -\frac{1}{2}$;
3) неравенство $4x^2 + 4x + 1 < 0$ не имеет решений.

Так как $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$, то эти неравенства можно решить устно.

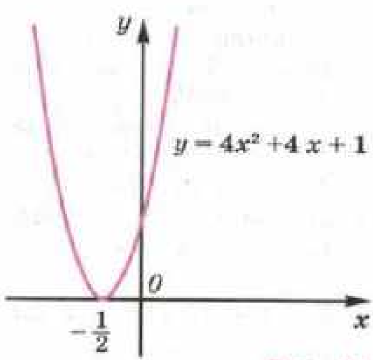


Рис. 65

Задача 3. Решить неравенство $-x^2+x-1<0$.

▶ Изобразим эскиз графика функции $y=-x^2+x-1$. Ветви этой параболы направлены вниз. Уравнение $-x^2+x-1=0$ не имеет действительных корней, поэтому парабола не пересекает ось Ox. Следовательно, эта парабола расположена ниже оси Ox (рис. 66).

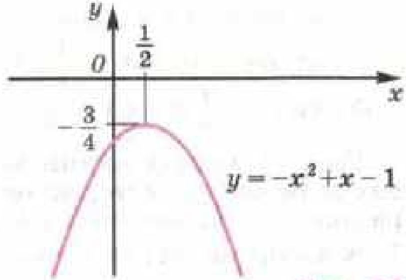


Рис. 66

Это означает, что значения квадратичной функции при всех x отрицательны, т. е. неравенство $-x^2+x-1<0$ выполняется при всех действительных значениях x. ◁

Из рисунка 66 видно также, что решениями неравенства $-x^2+x-1\leqslant 0$ являются все действительные значения x, а неравенства $-x^2+x-1>0$ и $-x^2+x-1\geqslant 0$ не имеют решений.

Итак, для **решения квадратного неравенства с помощью графика** нужно:

1) определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции;
2) найти действительные корни соответствующего квадратного уравнения или установить, что их нет;
3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (или касания) с осью Ox, если они есть;
4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Устные вопросы и задания

1. Как называются абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox?

2. Установить, какие из указанных точек расположены на координатной плоскости выше оси абсцисс: (0; 5); (−3; −2); (4; −4); (6; 0); (−10; 1).

3. Установить, какие из указанных точек расположены на координатной плоскости ниже оси абсцисс: (0; −3); (−8; 5); (−7; 0); (6; 4); (−9; −12).

4. Сколько общих точек с осью абсцисс имеет парабола:

1) $y=x^2+2x+1$; 2) $y=x^2-2x-3$;
3) $y=-2x^2+x+5$; 4) $y=-4x^2+4x-1$?

5. Установить, имеет ли общие точки с осью Ox парабола:

1) $y=x^2-3x-5$; 2) $y=x^2-x+\frac{1}{4}$; 3) $y=-x^2+2x+4$.

6. В какой полуплоскости относительно оси Ox должна быть расположена парабола $y=ax^2+bx+c$, чтобы не имело решений неравенство:

1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\leqslant 0$?

7. В какой полуплоскости (относительно оси Ox) должна быть расположена парабола $y=ax^2+bx+c$, чтобы любое действительное число было решением неравенства:

1) $ax^2+bx+c<0$; 2) $ax^2+bx+c\geqslant 0$?

8. Сформулировать алгоритм решения квадратного неравенства с помощью графика.

Вводные упражнения

1. Найти нули функции:

1) $y=-\frac{1}{3}x^2$; 2) $y=\frac{1}{4}x^2-1$; 3) $y=3x^2-5x$;

4) $y=x^2-6x+9$; 5) $y=-x^2-4x-4$; 6) $y=x^2-3x-4$.

2. Определить направление ветвей параболы:

1) $y=3x^2+x-1$; 2) $y=-2x^2+6x-5$;

3) $y=-1+6x^2$; 4) $y=x-2x^2$.

3. Не используя график квадратичной функции, решить неравенство:

1) $(x-7)(x+8)\geqslant 0$; 2) $(x+6)(x-4)<0$;

3) $x^2-9<0$; 4) $x^2\geqslant 25$.

Упражнения

659. Построить график функции $y=x^2+x-6$. Определить по графику значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

Решить квадратное неравенство (**660—664**).

660. 1) $x^2-3x+2\leqslant 0$; 2) $x^2-3x-4\geqslant 0$;
3) $-x^2+3x-2<0$; 4) $-x^2+3x+4>0$.

661. 1) $2x^2+7x-4<0$; 2) $3x^2-5x-2>0$;
3) $-2x^2+x+1\geqslant 0$; 4) $-4x^2+3x+1\leqslant 0$.

662. 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2-14x+49\leqslant 0$; 3) $4x^2-4x+1\geqslant 0$;
4) $4x^2-20x+25<0$; 5) $-9x^2-6x-1<0$; 6) $-2x^2+6x-4{,}5\leqslant 0$.

663. 1) $x^2-4x+6>0$; 2) $x^2+6x+10<0$; 3) $x^2+x+2>0$;
4) $x^2+3x+5<0$; 5) $2x^2-3x+7<0$; 6) $4x^2-8x+9>0$.

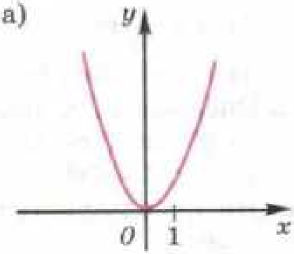
664. 1) $5-x^2 \geqslant 0$; 2) $-2{,}1x^2+10{,}5x<0$; 3) $-3{,}6x^2-7{,}2x<0$;
4) $-x^2+7<0$; 5) $-6x^2-x+12>0$; 6) $-3x^2-6x+45<0$;
7) $-\frac{1}{2}x^2+4{,}5x-4>0$; 8) $-x^2-3x-2>0$.

665. (Устно.) Используя график функции $y=ax^2+bx+c$ (рис. 67), указать, при каких значениях x эта функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значение, равное нулю.

666. (Устно.) Решить неравенство:
1) $x^2+10>0$; 2) $x^2+9<0$; 3) $(x-1)^2+1>0$;
4) $(x+5)^2+3<0$; 5) $-(x+1)^2-2<0$; 6) $-(x-2)^2-4>0$;
7) $0{,}5x^2+8 \leqslant 0$; 8) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+21 \geqslant 0$.

Решить неравенство **(667—669)**.

667. 1) $4x^2-9>0$; 2) $9x^2-25>0$;
3) $x^2-3x+2>0$; 4) $x^2-3x-4<0$;
5) $2x^2-4x+9 \leqslant 0$; 6) $3x^2+2x+4 \geqslant 0$;
7) $\frac{1}{2}x^2-4x \geqslant -8$; 8) $\frac{1}{3}x^2+2x \leqslant -3$.



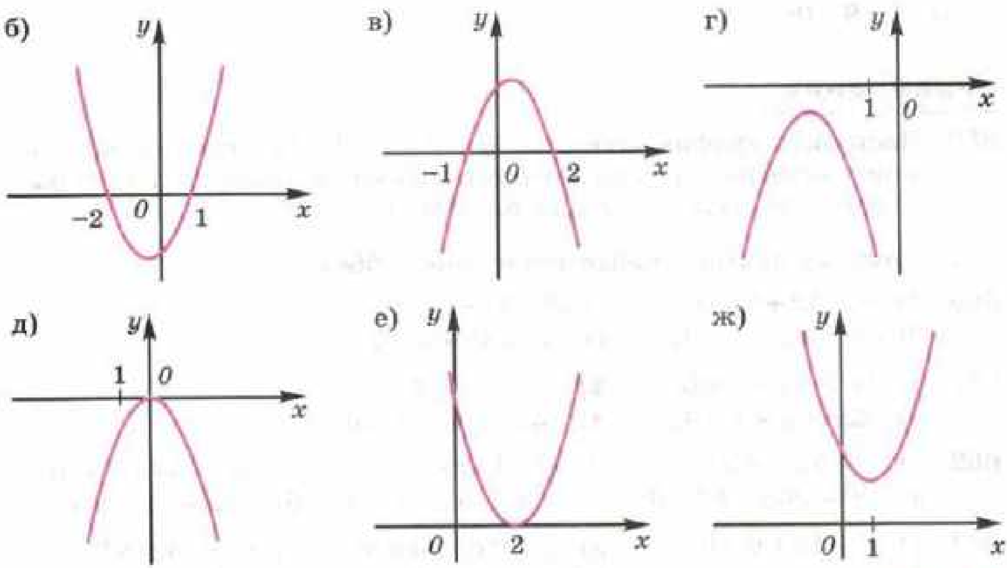


Рис. 67

668. 1) $2x^2-8x\leqslant-8$; 2) $x^2+12x\geqslant-36$; 3) $9x^2+25<30x$;
4) $16x^2+1>8x$; 5) $2x^2-x\geqslant 0$; 6) $3x^2+x\leqslant 0$.

669. 1) $x(x+1)<2(1-2x-x^2)$; 2) $x^2+2<3x-0{,}125x^2$;
3) $6x^2+1\leqslant 5x-0{,}25x^2$; 4) $2x(x-1)<3(x+1)$;
5) $\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}x^2\leqslant x+1$; 6) $\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}\geqslant x-1$.

670. Найти все значения x, при которых функция принимает значения, не большие нуля:
1) $y=-x^2+6x-9$; 2) $y=x^2-2x+1$;
3) $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}$; 4) $y=-\frac{1}{3}x^2-4x-12$.

671. Показать, что при $q>1$ решениями неравенства $x^2-2x+q>0$ являются все действительные значения x.

672. Найти все значения r, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство $x^2-(2+r)x+4>0$.

673. Найти все значения r, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство

$$(r^2-1)x^2+2(r-1)x+2>0.$$

Шаг вперёд

Неравенства с параметрами

Вы научились изображать эскиз параболы $y=ax^2+bx+c$ (по отношению к оси Ox) в зависимости от знаков коэффициента a и дискриминанта D соответствующего квадратного уравнения.

А бывает, что нужно строить более точный эскиз параболы, например учитывающий её расположение по отношению к оси Oy?

Конечно, бывает. Для решения некоторых задач полезно определять местоположение оси параболы или, например, точки её пересечения с осью Oy.

Хорошо бы рассмотреть конкретную задачу, в которой нужно как можно точнее определить положение параболы на координатной плоскости.

Тогда предлагаю решить следующую задачу:

«При каких значениях параметра a решениями неравенства $(a-3)x^2-2ax+3a-6\geqslant 0$ являются все точки отрезка, правый конец которого — отрицательное число?»

Во-первых, сразу замечу, что $a \neq 3$. Иначе пришлось бы иметь дело с неравенством $6x - 3 \leq 0$, а его решения — не отрезок, а луч $x \leq 0{,}5$. Значит, графиком функции

$$y = (a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6$$

является парабола, пересекающая ось абсцисс в двух точках, а её ветви направлены вниз (иначе решениями исходного неравенства был бы не отрезок, а два луча). Отсюда следует, что первый коэффициент $a - 3$ отрицателен. Раз второй коэффициент трёхчлена имеет вид чётного числа, то положительным должен быть не только дискриминант D, но и $\frac{D}{4}$ соответствующего квадратного уравнения.

Отлично рассуждаешь. Но подумай, каким условием задачи ты ещё не воспользовался. Твои выводы пока не дают возможности однозначно определить положение параболы по отношению к оси Oy.

Если $x = 0$, то $y = 3a - 6$, т. е. парабола пересечёт ось Oy в точке с ординатой $3a - 6$. А если добавить условие, что свободный член $3a - 6$ должен быть отрицательным, тем самым мы опишем уже все условия, которые задают параболу, пересекающую ось Ox в двух точках таким образом, что правая точка имеет отрицательную абсциссу (рис. *а*).

Ты не прав, по твоим рассуждениям парабола

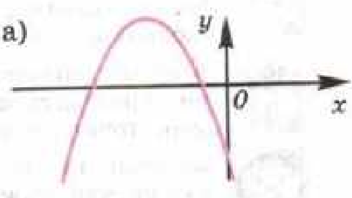
$$y = (a-3) \times x^2 - 2ax + 3a - 6$$

может иметь и другое расположение (см. рис. *б*). Ещё чего-то не хватает для определения местоположения параболы, имеющей правую точку пересечения с осью Ox в левой полуплоскости.

Но ведь абсцисса точки пересечения оси параболы с осью Ox тоже должна быть отрицательной, т. е. $\frac{a}{a-3} < 0$.

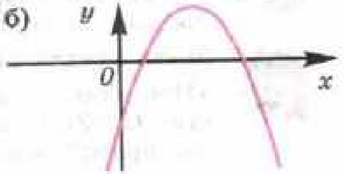
Молодец. Теперь положение параболы определилось однозначно (рис. *а*). Соберём вместе все требования, которые определяют такое её расположение:

а)



$$\begin{cases} a - 3 < 0, \\ \frac{D}{4} > 0, \\ 3a - 6 < 0, \\ \frac{a}{a-3} < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

б)



Можно сразу упростить эту систему. Если $a-3<0$, то из последнего неравенства системы следует, что $a>0$. Из третьего неравенства вытекает, что $a<2$. Итак, должны одновременно выполняться неравенства $a<3$, $a>0$ и $a<2$. Это возможно, только когда $0<a<2$.

Решу неравенство: $\frac{D}{4}>0$. Итак, $\frac{D}{4}=a^2-(a-3)(3a-6)=$ $=-2a^2+15a-18$. Таким образом, $-2a^2+15a-18>0$, если $1{,}5<a<6$. Значит, решением системы (*) будет промежуток $1{,}5<a<2$. Это о т в е т к задаче.

Вот мы вместе и решили непростую задачу. Для с а м о с т о я т е л ь н о й работы предлагаю ещё две задачи с параметрами.

• Найдите значения a, при которых решением неравенства $(a-3)x^2+2x+3a-11\geqslant 0$ является единственное число.

(О т в е т. $a=2\frac{2}{3}$, $a=4$.)

• Найдите значения a, при которых решениями неравенства $2x^2-4a^2x+1-a^2\leqslant 0$ являются все числа отрезка, левый конец которого — положительное число.

(О т в е т. $-1<a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$.)

§ 42 Метод интервалов

В этом параграфе вы познакомитесь с универсальным методом решения неравенств, в левой части которых записано произведение (или частное) линейных множителей, а в правой — нуль. С помощью этого метода — метода интервалов — решаются и квадратные неравенства, если удаётся разложить на линейные множители трёхчлен, стоящий в его левой части.

Нужно вспомнить:

- формулы корней квадратного уравнения;
- формулу разложения квадратного трёхчлена на множители;
- решение линейных неравенств;
- изображение точки с заданной координатой на числовой оси;
- записи числовых промежутков с помощью знаков неравенств;
- определение знака произведения двух и более множителей;
- формулы разности квадратов и квадрата суммы (разности) двух чисел;

- определение знака квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, если $b^2-4ac<0$.

При решении неравенств часто применяется **метод интервалов.** Поясним этот метод на примерах.

Задача 1. Выяснить, при каких значениях x квадратный трёхчлен x^2-4x+3 принимает положительные значения, а при каких — отрицательные.

▶ Найдём корни уравнения $x^2-4x+3=0$: $x_1=1$, $x_2=3$. Поэтому

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3).$$

Точки $x=1$ и $x=3$ (рис. 68) разбивают числовую ось на три промежутка: $x<1$, $1<x<3$ и $x>3$.

Двигаясь вдоль числовой оси справа налево, видим, что на интервале $x>3$ трёхчлен $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ принимает положительные значения, так как в этом случае оба множителя $x-1$ и $x-3$ положительны.

На следующем интервале $1<x<3$ этот трёхчлен принимает отрицательные значения и, таким образом, при переходе через точку $x=3$ меняет знак. Это происходит потому, что в произведении $(x-1)(x-3)$ при переходе через точку $x=3$ первый множитель $x-1$ не меняет знак, а второй $x-3$ меняет знак.

При переходе через точку $x=1$ трёхчлен снова меняет знак, так как в произведении $(x-1)(x-3)$ первый множитель $x-1$ меняет знак, а второй $x-3$ не меняет.

Итак, при движении по числовой оси справа налево от одного интервала к соседнему знаки произведения $(x-1)\times$ $\times(x-3)$ чередуются.

Таким образом, задачу о знаке квадратного трёхчлена x^2-4x+3 можно решить следующим **способом.**

Отмечаем на числовой оси корни уравнения $x^2-4x+3=0$ — точки $x_1=1$, $x_2=3$. Они разбивают числовую ось (рис. 68) на три интервала. Заметив, что при $x>3$ значения трёхчлена x^2-4x+3 положительны, расставляем его знаки на остальных интервалах в порядке чередования (рис. 69).

Из рисунка 69 видно, что $x^2-4x+3>0$ при $x<1$ и $x>3$, а $x^2-4x+3<0$ при $1<x<3$. ◁

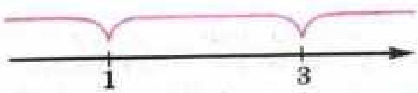


Рис. 68

Рис. 69

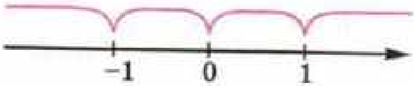


Рис. 70

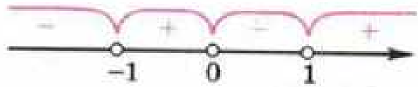


Рис. 71

Рассмотренный способ называют **методом интервалов**. Этот метод используется при решении квадратных и некоторых других неравенств.

Например, решая задачу 1, мы практически решили методом интервалов неравенства $x^2-4x+3>0$ и $x^2-4x+3<0$.

Задача 2. Решить неравенство $x^3-x<0$.

▶ Разложим многочлен x^3-x на множители:

$$x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1).$$

Значит, неравенство можно записать так: $(x+1)x(x-1)<0$.

Отметим на числовой оси точки –1, 0 и 1. Эти точки разбивают числовую ось на четыре интервала (рис. 70):

$$x<-1,\ -1<x<0,\ 0<x<1 \text{ и } x>1.$$

При $x>1$ все множители произведения $(x+1)x(x-1)$ положительны, и поэтому $(x+1)x(x-1)>0$ на интервале $x>1$. Учитывая смену знака произведения при переходе к соседнему интервалу, найдём для каждого интервала знак произведения $(x+1)x(x-1)$ (рис. 71).

Таким образом, решениями неравенства являются все значения x из интервалов $x<-1$ и $0<x<1$.

Ответ. $x<-1,\ 0<x<1$. ◁

Задача 3. Решить неравенство $(x^2-9)(x+3)(x-2)>0$.

▶ Данное неравенство можно записать в виде

$$(x+3)^2(x-2)(x-3)>0. \qquad (1)$$

Так как $(x+3)^2>0$ при всех $x\neq-3$, то при $x\neq-3$ множества решений неравенства (1) и неравенства

$$(x-2)(x-3)>0 \qquad (2)$$

совпадают.

Значение $x=-3$ не является решением неравенства (1), так как при $x=-3$ левая часть неравенства равна 0. Решая неравенство (2) методом интервалов

Рис. 72

(рис. 72), получаем $x<2$, $x>3$. Учитывая, что $x=-3$ не является решением исходного неравенства, окончательно получаем:

Ответ. $x<-3$, $-3<x<2$, $x>3$. ◁

Задача 4. Решить неравенство $\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4} \geqslant 0$.

▶ Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, получим:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geqslant 0. \qquad (3)$$

Отметим на числовой оси точки -3; -1; 1; 4, в которых числитель или знаменатель дроби обращается в нуль. Эти точки разбивают числовую прямую на пять интервалов. При $x>4$ все множители числителя и знаменателя дроби положительны, и поэтому дробь положительна.

При переходе от одного интервала к следующему дробь меняет знак, поэтому можно расставить знаки дроби так, как это показано на рисунке 73.

Значения $x=-3$ и $x=1$ удовлетворяют неравенству (3), а при $x=-1$ и $x=4$ дробь не имеет смысла. Таким образом, исходное неравенство имеет следующие решения:

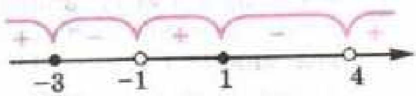


Рис. 73

Ответ. $x \leqslant -3$, $-1<x\leqslant 1$, $x>4$. ◁

Устные вопросы и задания

1. На какие интервалы разбивают числовую ось: точки $x=-1$ и $x=5$; точки $x=-2$; $x=0$ и $x=3$?
2. Сформулировать алгоритм расстановки знаков значений выражения x^2+px+q на интервалах числовой оси, на которые её разбивают числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, если $x_1<x_2$.
3. С какой целью при решении задачи 2 левую часть неравенства разложили на линейные множители?
4. Почему в задаче 3 при $x=-3$ множества решений неравенств (1) и (2) не совпадают?
5. Почему в задаче 4 значения $x=-1$ и $x=4$ не являются решениями неравенства (3)?

Вводные упражнения

1. Разложить на множители:

1) $5x^2-7x$; 2) $\frac{4}{9}x^2-49$; 3) x^2-x; 4) $3x^3+2x^2-x$.

2. При $x=-2$ определить знак выражения $x-1$; $x-3$; $(x-1)(x-3)$.

3. Известно, что x принадлежит промежутку $(2;\ 3)$. Определить знак выражения $x-2$; $x-3$; $(x-2)(x-3)$.

4. Определить знак выражения:

1) $x-5$ при $x>5$; при $x<5$; 2) $x+4$ при $x>-4$; $x<-4$.

Упражнения

674. (Устно.) Показать, что значение $x=5$ является решением неравенства:

1) $(x-1)(x-2)>0$; 2) $(x+2)(x+5)>0$;
3) $(x-7)(x-10)>0$; 4) $(x+1)(x-4)>0$.

Решить методом интервалов неравенство (**675—686**).

675. 1) $(x+2)(x-7)>0$; 2) $(x+5)(x-8)<0$;
3) $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$; 4) $(x+5)\left(x-3\frac{1}{2}\right)>0$.

676. 1) $x^2+5x>0$; 2) $x^2-9x>0$; 3) $2x^2-x<0$;
4) $x^2+3x<0$; 5) $x^2+x-12<0$; 6) $x^2-2x-3>0$.

677. 1) $x^3-16x<0$; 2) $4x^3-x>0$;
3) $(x^2-1)(x+3)<0$; 4) $(x^2-4)(x-5)>0$.

678. 1) $(x-5)^2(x^2-25)>0$; 2) $(x+7)^2(x^2-49)<0$;
3) $(x-3)(x^2-9)<0$; 4) $(x-4)(x^2-16)>0$;
5) $(x-8)(x-1)(x^2-1)\geqslant 0$; 6) $(x-5)(x+2)(x^2-4)\leqslant 0$.

679. 1) $\frac{x-2}{x+5}>0$; 2) $\frac{x-4}{x+3}<0$; 3) $\frac{1{,}5-x}{3+x}\geqslant 0$; 4) $\frac{3{,}5+x}{x-7}\leqslant 0$.

680. 1) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}<0$; 2) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}\geqslant 0$.

681. 1) $\frac{x^2-2x+3}{(x-2)^2}\leqslant 0$; 2) $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1}\geqslant 0$;
3) $\frac{x^2-x}{x^2-4}>0$; 4) $\frac{9x^2-4}{x-2x^2}<0$.

682. 1) $(x^2-5x+6)(x^2-1)>0$; 2) $(x+2)(x^2+x-12)>0$.

683. 1) $(x^2-7x+12)(x^2-x+2)\leqslant 0$;
2) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15)\leqslant 0$.

684. 1) $\dfrac{x^2-x-12}{x-1}>0$; 2) $\dfrac{x^2-4x-12}{x-2}<0$.

685. 1) $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x-6}\geqslant 0$.

686. 1) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{3}{x}>\dfrac{3}{x-2}$; 2) $\dfrac{x^2}{x^2+3x}+\dfrac{2-x}{x+3}<\dfrac{5-x}{x}$;
3) $\dfrac{x^2-7x-8}{x^2-64}<0$; 4) $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-4}>0$;
5) $\dfrac{5x^2-3x-2}{1-x^2}\geqslant 0$; 6) $\dfrac{x^2-16}{2x^2+5x-12}>0$.

Шаг вперёд

Уравнения и неравенства с модулями


Идея рассмотрения знаков выражения на различных интервалах применяется и при решении уравнений (неравенств), содержащих неизвестное под знаками модулей.


Зачем нужно рассматривать знаки выражений, например при решении уравнения $|3-2x|=|x-9|$?


Действительно, все корни уравнения вида $|f(x)|=|g(x)|$ легче получить, рассматривая уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$. Так, в предложенном тобой уравнении $3-2x=x-9$ или $3-2x=-(x-9)$, откуда $x_1=4$, $x_2=-6$. Но при решении, например, уравнения $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$ проще воспользоваться *раскрытием модулей* на интервалах.


Покажите, пожалуйста, как решить предложенное Вами уравнение. Мне кажется, что придётся рассматривать очень много вариантов значений x.


Хорошо. Ответьте мне на такой вопрос: «При переходе через какую точку меняет знак выражение, стоящее под знаком первого модуля; второго модуля; третьего модуля?»


При переходе через точку $x=1$ меняется знак у выражения $x-1$. Выражение, стоящее под вторым модулем, меняет знак при переходе через точку $x=2$. Выражение, записанное под третьим знаком модуля, — при переходе через $x=3$.

Верно. Сделаем *схему знаков* выражений $x-1$, $x-2$ и $x-3$ на каждом из четырёх образовавшихся интервалов. Теперь ясно, как раскроется каждый модуль на указанных в схеме интервалах.

	$x<1$	$1<x<2$	$2<x<3$	$x>3$
$x-1$	–	+	+	+
$x-2$	–	–	+	+
$x-3$	–	–	–	+

Каждую из точек, разбивающих числовую ось на интервалы, будем присоединять к одному из соседних интервалов. Таким образом, корни исходного уравнения будут совпадать со всеми решениями четырёх систем:

1) $\begin{cases} x<1, \\ -(x-1)+2(x-2)-3(x-3)=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1\leqslant x<2, \\ x-1+2(x-2)-3(x-3)=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2\leqslant x<3, \\ x-1-2(x-2)-3(x-3)=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x-1-2(x-2)+3(x-3)=4. \end{cases}$

Решим уравнения в полученных системах:

1) $\begin{cases} x<1, \\ x=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1\leqslant x<2, \\ x \text{ — любое число}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2\leqslant x<3, \\ x=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x=5. \end{cases}$

Очевидно, первая система не имеет решений, для второй решением будет любое число из промежутка $[1;\ 2)$, для третьей — $x=2$, для четвёртой — $x=5$. Можно записать о т в е т: $1\leqslant x\leqslant 2$ и $x=5$.

Для с а м о с т о я т е л ь н о г о решения предлагаю вам следующие уравнения и неравенства:

1) $|x|+|x-7|+2|x-4|=2$; 2) $|3x-8|-|3x-2|=6$;
3) $|5x+1|-|2x-4|\geqslant 3$; 4) $|x+2|-|x-1|+|x-3|<4$.

Приведу о т в е т ы к этим заданиям:

1) нет решений; 2) $x\leqslant\frac{2}{3}$; 3) $x\leqslant-\frac{8}{3}$, $x\geqslant\frac{6}{7}$;
4) $-4<x<0$, $2<x<4$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

Решить неравенство (687—691).

687. 1) $(x-5,7)(x-7,2)>0$; 2) $(x-3)(x-4)>0$;
3) $(x-2,5)(3-x)<0$; 4) $(x-3)(4-x)<0$;
5) $x^2>x$; 6) $x^2>36$; 7) $4>x^2$; 8) $\frac{9}{16}\geqslant x^2$.

688. 1) $-9x^2+1\leqslant 0$; 2) $-4x^2+1\geqslant 0$; 3) $-5x^2-x\geqslant 0$;
4) $-3x^2+x\leqslant 0$; 5) $-2x^2+4x+30<0$; 6) $-2x^2+9x-4>0$;
7) $4x^2+3x-1<0$; 8) $2x^2+3x-2<0$.

689. 1) $6x^2+x-1>0$; 2) $5x^2-9x+4>0$; 3) $x^2-2x+1\geqslant 0$;
4) $x^2+10x+25>0$; 5) $-x^2+6x-9<0$; 6) $-4x^2-12x-9<0$.

690. 1) $x^2-3x+8>0$; 2) $x^2-5x+10<0$; 3) $2x^2-3x+5\geqslant 0$;
4) $3x^2-4x+5\leqslant 0$; 5) $-x^2+2x+4\leqslant 0$; 6) $-4x^2+7x-5>0$.

691. 1) $(x-2)(x^2-9)>0$; 2) $(x^2-1)(x+4)<0$; 3) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1}\leqslant 0$;
4) $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)}\geqslant 0$; 5) $\frac{4x^2-4x-3}{x+3}\geqslant 0$; 6) $\frac{2x^2-3x-2}{x-3}<0$.

Решить неравенство (692—696).

692. 1) $x^2>2-x$; 2) $x^2-5<4x$; 3) $x+8<3x^2-9$;
4) $x^2\leqslant 10-3x$; 5) $10x-12<2x^2$; 6) $3-7x\leqslant 6x^2$.

693. 1) $x^2+4<x$; 2) $x^2+3>2x$; 3) $-x^2+3x\leqslant 4$;
4) $-x^2-5x\geqslant 8$; 5) $3x^2-5>2x$; 6) $2x^2+1<3x$;
7) $\frac{x^2}{10}+2\leqslant\frac{7x}{10}$; 8) $\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}>\frac{3x-10}{4}$.

694. 1) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}x^2\geqslant 1-x$; 2) $\frac{1}{3}x(x+1)\leqslant(x-1)^2$;
3) $x(1-x)>1,5-x$; 4) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\geqslant x(x-1)$;
5) $x\left(\frac{x}{4}-1\right)\leqslant x^2+x+1$; 6) $2x-2,5>x(x-1)$.

695. 1) $\frac{2}{x-\sqrt{2}}\geqslant\frac{3}{x+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3-x^2}<\frac{2}{\sqrt{3}-x}$; 3) $\frac{3}{x^2-1}-\frac{1}{2}<\frac{3}{2x-2}$.

696. 1) $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3}>0$; 2) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2+9x-2}<0$; 3) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1}\geqslant 0$.

697. Катер должен не более чем за 4 ч пройти по течению реки 22,5 км и вернуться обратно. С какой скоростью относительно воды должен идти катер, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

698. В одной системе координат построить графики функций и выяснить, при каких x значения одной функции больше (меньше) значений другой, результат проверить, решив соответствующее неравенство:

1) $y=2x^2$, $y=2-3x$;
2) $y=x^2-2$, $y=1-2x$;
3) $y=x^2-5x+4$, $y=7-3x$;
4) $y=3x^2-2x+5$, $y=5x+3$;
5) $y=x^2-2x$, $y=-x^2+x+5$;
6) $y=2x^2-3x+5$, $y=x^2+4x-5$.

699. Решить неравенство:

1) $\frac{x^4-5x^2-36}{x^2+x-2} \geqslant 0$;
2) $\frac{x^4+4x^2-5}{x^2+5x+6} \leqslant 0$;
3) $\frac{x^4-2x^2-8}{x^4-2x^2-3} > 0$.

700. Найти четыре последовательных целых числа, такие, что куб второго из них больше произведения трёх остальных.

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. С палубы корабля (11 м над уровнем моря) бросили под углом к горизонту спасательный круг со скоростью 6 м/с. Высота h (м) нахождения круга над уровнем моря в зависимости от t (с) времени полёта описывается формулой $h=11+6t-5t^2$. Через какое время круг окажется к воде ближе чем на 3 м?

2. Известно, что средний рост сосен h (м) в сосняках Московской области находится по формуле $h=\frac{t^2}{0{,}0242t^2+0{,}0737t+0{,}2129}$, где t — возраст сосен, выраженный в десятках лет. Определить возраст сосняка, если средняя высота деревьев в нём не превысила: 1) 13,8 м; 2) 21,1 м. Может ли в Московской области вырасти сосняк высотой не менее: 3) 40 м; 4) 41,5 м?

В этой главе вы узнали,

что такое:

— квадратное неравенство;
— метод интервалов;

как:

— решать квадратное неравенство сведением его к системе линейных неравенств (в том случае, когда соответствующее квадратное уравнение имеет два корня);
— решать квадратное неравенство с помощью графика квадратичной функции;
— решать неравенства методом интервалов.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Решить неравенство:
   а) $x^2-0{,}04\leqslant 0$; б) $0{,}01x^2-9>0$;
   в) $x^2-3x-4<0$; г) $3x^2-4x+8\geqslant 0$;
   д) $-x^2+3x-5>0$; е) $x^2+20x+100\leqslant 0$.
2. Решить методом интервалов неравенство:
$$x(x-1)(x+2)\geqslant 0.$$

II уровень

3. Решить неравенство:
   а) $\frac{8x-1}{5-x}\leqslant 0$; б) $2x(x-3)+16\geqslant 3x(5-x)$;
   в) $x(2x-5)+4\leqslant x(7-3x)$; г) $\frac{x^2}{3}-\frac{3x-10}{4}<\frac{2x}{3}$.
4. Решить методом интервалов неравенство: $\frac{x^2-2x-15}{x^2+6x}\leqslant 0$.

III уровень

5. Решить неравенство:
   а) $2(x-7)^2-18\leqslant 0$; б) $(x+5)^2\geqslant 16$.
6. Решить систему неравенств $\begin{cases}2x^2+x-15>0,\\ 7x+30\geqslant 0.\end{cases}$
7. При каких значениях q решениями неравенства x^2+ $+4x+q>0$ являются все действительные числа?
8. Решить методом интервалов неравенство $\frac{(x-5)(x+3)^3}{x^2+2x+1}\leqslant 0$.
9. Для каждого значения a решить неравенство $x^2-2ax>$ $>2a-2a^2-1$.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Задачи физики, биологии, астрономии, архитектуры и др., приводящие к решению квадратных неравенств.
2. Решение неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля.
3. Неравенства с параметрами.
4. Решение систем неравенств второй степени с одним неизвестным.
5. Исследование квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ в зависимости от дискриминанта и коэффициентов a, b и c.

Упражнения для повторения курса алгебры VIII класса

701. Вычислить:

1) $\frac{27}{32}\cdot\frac{8}{162}\cdot\frac{72}{69}$; 2) $\frac{38}{147}\cdot\frac{91}{152}\cdot\frac{65}{264}$;

3) $\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{12}\right)\cdot\left(3\frac{23}{58}-2\frac{9}{58}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{9}\right)\cdot\left(2\frac{23}{56}-3\frac{15}{56}\right)$;

5) $34{,}17:1{,}7+\left(2\frac{3}{4}+0{,}15\right):\frac{4}{5}-23\frac{3}{8}$; 6) $5{,}86-3\frac{5}{6}\cdot\frac{15}{23}+\frac{15}{28}:4\frac{2}{7}$;

7) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\cdot2\frac{4}{7}}$; 8) $\dfrac{5\frac{1}{7}\cdot5\frac{1}{4}+5\frac{5}{8}\cdot3\frac{1}{5}}{10\frac{5}{13}:1\frac{1}{26}}$.

702. Решить уравнение:

1) $(x-9)(2-x)=0$; 2) $(x+4)(3-x)=0$; 3) $2x^2-x=0$;
4) $3x^2+5x=0$; 5) $1-4x^2=0$; 6) $9x^2-4=0$;
7) $\frac{5x^2-x}{x}=0$; 8) $\frac{3x^2+x}{x}=0$.

703. Доказать, что если $x>0{,}5$ и $y>4$, то:

1) $4x+3y>14$; 2) $2xy-3>1$;
3) $x^2y>1$; 4) $x^3+y^2>16$.

704. (Устно.) Найти наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $n\leqslant-7$; 2) $n<-3{,}6$; 3) $n\leqslant4{,}8$; 4) $n\leqslant-5{,}6$.

705. (Устно.) Найти наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $n>-12$; 2) $n\geqslant-5{,}2$; 3) $n\geqslant8{,}1$; 4) $n\geqslant-8{,}1$.

706. Решить неравенство:

1) $x+4>3-2x$; 2) $5(y+2)\geqslant8-(2-3y)$;
3) $2(0{,}4+x)-2{,}8\geqslant2{,}3+3x$; 4) $7(x+5)+10>17$;
5) $\frac{3-x}{2}+\frac{x}{4}>7$; 6) $\frac{x}{6}-\frac{2-x}{3}\leqslant5$.

707. Какие целые значения может принимать x, если:

1) $0\leqslant x\leqslant7{,}2$; 2) $-5\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant0$;
3) $4<\frac{1}{3}x<5$; 4) $11<3x<13$?

708. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}5y = 1, \\ 0{,}5x + 0{,}2y = 5{,}8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(x+y) = (x-y) + 5, \\ 3(x+y) = (x-y) + 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{2} + 1, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6, \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 5, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 4x - 9y = -24, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$

709. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 6x - 1, \\ 4 - 3x > 2x - 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7(x+1) - 2x > 9 - 4x, \\ 3(5 - 2x) - 1 \geqslant 4 - 5x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 12x - 3(x+2) \geqslant 7x - 5, \\ 13x + 6 \leqslant (x-5) \cdot 2 + 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < \frac{3x-8}{4}, \\ \frac{6-x}{5} - 1 < \frac{14x-3}{2}. \end{cases}$

710. Найти целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} \frac{2x-5}{4} - 2 \leqslant \frac{3-x}{3}, \\ \frac{5x+1}{5} > \frac{4-x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{10x-1}{3} - \frac{2-5x}{4} < \frac{5-3x}{6}, \\ \frac{2x+1}{2} \geqslant \frac{3+7x}{4} - \frac{5+4x}{5}. \end{cases}$

711. Решить уравнение:

1) $|x-2| = 3{,}4$; 2) $|3-x| = 5{,}1$; 3) $|2x+1| = 5$;
4) $|1-2x| = 7$; 5) $|3x+2| = 5$; 6) $|7x-3| = 3$.

712. Решить неравенство:

1) $|x-2| \leqslant 5{,}4$; 2) $|x-2| \geqslant 5{,}4$; 3) $|2-x| < 5{,}4$;
4) $|3x+2| \geqslant 5$; 5) $|2x+3| < 5$; 6) $|3x-2{,}8| \geqslant 3$.

713. Найти погрешность приближения:

1) числа 0,2781 числом 0,278;
2) числа –2,154 числом –2,15;
3) числа $-\frac{7}{18}$ числом $-\frac{1}{3}$; 4) числа $\frac{3}{11}$ числом 0,272.

714. Доказать, что число 3,5 есть приближённое значение числа 3,5478 с точностью до 0,05.

715. Найти относительную погрешность приближения числа $\frac{7}{9}$ числом 0,777.

716. Представить бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:
1) 0,(7); 2) 1,(3); 3) 2,(31); 4) 0,(52); 5) 1,1(3); 6) 2,3(7).

717. Сравнить числа:
1) $\sqrt{23}$ и 5; 2) 3,1 и $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{0{,}0361}$ и 0,19; 4) $\sqrt{7{,}3}$ и 2,7.

718. При каких значениях a верно равенство:
1) $\sqrt{a+1}=2$; 2) $\sqrt{3-2a}=5$; 3) $2\sqrt{\frac{1}{6}a-2}=1$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{7a-4}=0$?

719. Вычислить: 1) $(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)$; 2) $(3\sqrt{5}+1)(1-3\sqrt{5})$.

720. Разложить на множители по образцу $a^2-7=(a-\sqrt{7})(a+\sqrt{7})$:
1) a^2-13; 2) $15-b^2$; 3) x^2-80; 4) $\frac{18}{41}-x^2$.

721. Вычислить:
1) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{160}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{33}$;
4) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}$; 5) $(3\sqrt{12}+2\sqrt{3})^2$; 6) $(2\sqrt{2}-3\sqrt{32})^2$.

722. Найти объём прямоугольного параллелепипеда, если высота его $\sqrt{12{,}5}$ см, ширина $\sqrt{5}$ см, длина $\sqrt{10}$ см.

723. Площадь одного квадрата равна 7,68 м^2, площадь другого 300 дм^2. Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго квадрата?

724. Вынести множитель из-под знака корня:
1) $\sqrt{16xy^2}$, где $x\geqslant 0$, $y<0$; 2) $\sqrt{45x^3y^5}$, где $x<0$, $y<0$.

725. Упростить: 1) $\sqrt{3}-5\sqrt{108}+\frac{1}{2}\sqrt{12}$; 2) $-\frac{1}{2}\sqrt{72}+4\sqrt{0{,}08}-2\sqrt{2}$.

726. Вычислить:
1) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}}+(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}):2\sqrt{5}$;
2) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}}+\frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{11}}$.

727. Упростить выражение:
1) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{22}-\sqrt{50}$; 2) $3\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{80}$;
3) $5\sqrt{a}-3\sqrt{4a}+2\sqrt{9a}$, где $a>0$;
4) $\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt{36x^3}-\frac{2x}{3}\sqrt{9x}$, где $x>0$.

728. Упростить выражение:

1) $\left(\frac{x}{y-x}-\frac{x}{y+x}\right)\cdot\frac{(x+y)^2}{2x^2}$; 2) $\left(\frac{1}{a-1}-1-\frac{1}{a+1}\right)\cdot(a^2-1)$;

3) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{ab}{a-b}$; 4) $(a+b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}$.

Решить уравнение (729—731).

729. 1) $3(x+1)(x+2)-(3x-4)(x+2)=36$;
2) $2(3x-1)(2x+5)-6(2x-1)(x+2)=48$;
3) $\frac{5y-4}{2}=\frac{16y+1}{7}$; 4) $\frac{19+3x}{8}-\frac{1-9x}{5}=0$;
5) $\frac{x+(x-5)}{2}=11$; 6) $\frac{2x-(3-x)}{2}=3\frac{3}{8}$.

730. 1) $x^2=7$; 2) $x^2=11$; 3) $x^2+6x=0$;
4) $x^2+5x=0$; 5) $x^2=8x$; 6) $x^2=12x$.

731. 1) $1{,}5x-4x^2=6{,}3x-x^2$; 2) $11y-15=(y+5)(y-3)$;
3) $3x(x+2)=2x(x-2)$; 4) $\frac{1}{4}(3x^2+1)-\frac{40x+3}{6}=\frac{x-3}{12}$;
5) $\frac{y^2-5}{4}-\frac{15-y^2}{5}=\frac{y^2-4}{3}$; 6) $\frac{2x^2-1}{4}=\frac{1+1{,}5x^2}{5}$.

732. Прямоугольник, одна сторона которого на 2 см больше другой, имеет площадь, равную площади квадрата со стороной, на 4 см меньшей периметра прямоугольника. Найти стороны прямоугольника.

733. Прямоугольник, одна сторона которого на 8 см меньше стороны квадрата, а другая вдвое больше стороны квадрата, имеет площадь, равную площади этого квадрата. Найти стороны прямоугольника.

Решить уравнение (734—737).

734. 1) $x^2+6x+5=0$; 2) $x^2+3{,}5x-2=0$; 3) $x^2-1{,}8x-3{,}6=0$;
4) $2x^2+3x-2=0$; 5) $4x^2-x-14=0$; 6) $x^2-x+3{,}5=0$.

735. 1) $2x^2+x-3=0$; 2) $20+8x-x^2=0$;
3) $2x^2-9x=35$; 4) $(x+5)(x-3)=2x-7$;
5) $2(x-2)(x+2)=(x+1{,}5)^2+4\left(x-5\frac{1}{16}\right)$;
6) $(x-3)(x-2)=7x-1$.

736. 1) $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{9}{16}=0$; 2) $\frac{5}{4}x^2-x+\frac{1}{9}=0$;
3) $\frac{3x^2-11}{8}+\frac{74-2x^2}{12}=10$.

737. 1) $x^2+3x+70=0$; 2) $x^2-12x+11=0$;
3) $x^2+20x+100=0$; 4) $x^2+18x-208=0$;
5) $x(x-15)=3(108-5x)$;
6) $(x-3)^2+(x+4)^2-(x-5)^2=17x+24$;
7) $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=3$; 8) $\frac{x(x-3)}{7}-11=-x$.

738. Найти коэффициенты p и q, если известно, что числа 10 и −15 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

739. Записать квадратное уравнение, корни которого отличались бы от корней данного уравнения только знаками:
1) $x^2-8x+15=0$; 2) $x^2+bx+c=0$.

Решить уравнение (740—743).

740. 1) $4x^4-17x^2+4=0$; 2) $4x^4-37x^2+9=0$;
3) $x^4-7x^2+12=0$; 4) $x^4-11x^2+18=0$.

741. 1) $x^4+x^2-2=0$; 2) $x^4-x^2-12=0$;
3) $x^4+3x^2+2=0$; 4) $x^4+5x^2+6=0$.

742. 1) $\frac{3}{x+2}=4+\frac{3}{x-1}$; 2) $\frac{1}{x+1}=3+\frac{3}{3x-1}$;
3) $1+\frac{5x}{x+1}=\frac{6x+2}{(x+1)^2}$; 4) $2+\frac{x}{x+2}=\frac{12-x}{(x+2)^2}$;
5) $\frac{3x}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}$; 6) $\frac{2x}{x-3}-\frac{1}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$.

743. 1) $\frac{x}{x-3}+\frac{3}{x^2-5x+6}=\frac{3}{2-x}$; 2) $\frac{3}{x-3}+\frac{3}{x^2-7x+12}=\frac{1-x}{x-4}$;
3) $3+\frac{5}{x-1}=\frac{2}{x+2}$; 4) $5+\frac{2}{x-2}=\frac{17}{x+3}$.

744. Разложить на множители квадратный трёхчлен:
1) $x^2-12x+35$; 2) $x^2-5x-36$; 3) $2x^2+x-3$;
4) $2x^2-3x-5$; 5) $-5x^2+11x-2$; 6) $-4x^2-10x+6$;
7) $-\frac{1}{3}x^2+8x+27$; 8) $\frac{1}{5}x^2+x-10$.

745. Сократить дробь:
1) $\frac{a^2-4}{a+2}$; 2) $\frac{a+2}{a^2-7a-18}$; 3) $\frac{a^2+7a+12}{a^2+6a+8}$;
4) $\frac{2a^2-5a-3}{4a^2-6a-4}$; 5) $\frac{-2a^2+3a+2}{2a^2+5a+2}$; 6) $\frac{-5a^2+13a+6}{5a^2-8a-4}$.

746. Разложить на множители:

1) $a^4 - b^4 + b^2 - a^2$; 2) $m^2n - n + mn^2 - m$;

3) $m^5 + m^3 - m^2 - m^4$; 4) $x^4 - x^3 - x + x^2$;

5) $16x^2 + 8xy - 3y^2$; 6) $4 + a^4 - 5a^2$;

7) $b^4 - 13b^2 + 36$; 8) $3x^2 - 6xm - 9m^2$.

747. Для приготовления бронзы берётся 17 частей меди, 2 части цинка и одна часть олова. Сколько нужно взять каждого металла отдельно, чтобы получить 400 кг бронзы?

748. Инспектор рыбнадзора, исследуя свой участок, проплыл на катере по течению реки за 4 ч расстояние, в 3 раза большее, чем за 2 ч против течения реки. Какое расстояние преодолел инспектор, если скорость течения реки 3 км/ч?

749. Бригада формовщиков должна была в определённый срок изготовить 48 пресс-форм для отливки деталей. Предложенная бригадой новая технология формовки позволила изготовлять на 4 пресс-формы больше в месяц, поэтому всё задание они выполнили за месяц до срока. Сколько пресс-форм выпускала бригада за месяц?

750. С одного участка собрали 450 т картофеля, а с другого, площадь которого на 5 га меньше, 400 т. Определить урожайность картофеля с каждого участка, если на втором участке она была на 2 т выше, чем на первом.

751. Числитель некоторой обыкновенной дроби на 11 больше знаменателя. Если к числителю дроби прибавить 5, а к знаменателю 12, то получится дробь, втрое меньшая исходной. Найти эту дробь.

752. Двумя комбайнами можно убрать урожай с некоторого поля за 12 дней. Если бы уборку производили на каждом комбайне отдельно, то первому потребовалось бы на 10 дней больше, чем второму. За сколько дней на каждом из комбайнов отдельно можно выполнить эту работу?

753. Две бригады монтажников затратили на сборку агрегата 6 ч 40 мин. Сколько времени потребуется на сборку такого же агрегата каждой бригаде отдельно, если одной из них потребуется на эту работу на 3 ч больше, чем другой?

754. Катер прошёл 12 км против течения реки и 5 км по течению реки за то же время, которое ему понадобилось для прохождения 18 км по озеру. Какова собственная скорость катера, если известно, что скорость течения реки 3 км/ч?

755. Построить графики функций и найти координаты точек их пересечения:

1) $y=2x$ и $y=3$; 2) $y=x-1$ и $y=0$;
3) $y=3x$ и $y=-2x+1$; 4) $y=2x-1$ и $y=-x+3$.

756. Дана функция $y=2{,}5x-5$. Найти:
1) значение x, при котором значение функции равно нулю;
2) координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

757. Дана функция $y=-3x+1$.
1) Вычислить: $y(0)$, $y(1)$, $y(-1)$, $y(-4)$.
2) Найти значения x, при которых $y(x)=1$, $y(x)=-1$, $y(x)=-3$.
3) Найти значения x, при которых $y(x)>0$, $y(x)<0$, $y(x)=0$.

758. Найти координаты вершины параболы и точки пересечения параболы с осями координат:

1) $y=(x-4)^2+4$; 2) $y=(x+4)^2-4$; 3) $y=x^2+x$;
4) $y=x^2-x$; 5) $y=x^2-4x+3$; 6) $y=x^2+6x+8$;
7) $y=2x^2-3x-2$; 8) $y=3+5x+2x^2$.

759. Построить график функции:

1) $y=x^2+6x+9$; 2) $y=x^2-\frac{7}{2}$;
3) $y=x^2-12x+4$; 4) $y=x^2+3x-1$;
5) $y=x^2+x$; 6) $y=x^2-x$;
7) $y=(x-2)(x+5)$; 8) $y=\left(x+\frac{1}{8}\right)(x+4)$.

760. (Устно.) Используя график функции $y=ax^2+bx+c$ (рис. 74), установить её свойства.

761. Построить график функции и установить её свойства:

1) $y=-2x^2-8x-8$;
2) $y=3x^2+12x+16$;
3) $y=2x^2-12x+19$; 4) $y=3+2x-x^2$;
5) $y=-4x^2-4x$; 6) $y=12x-4x^2-9$.

762. На одной координатной плоскости построить графики функций:

1) $y=\frac{1}{3}x^2$ и $y=-\frac{1}{3}x^2$;
2) $y=3x^2$ и $y=3x^2-2$;
3) $y=-\frac{1}{2}x^2$ и $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$;
4) $y=2x^2$ и $y=2(x-5)^2+3$.

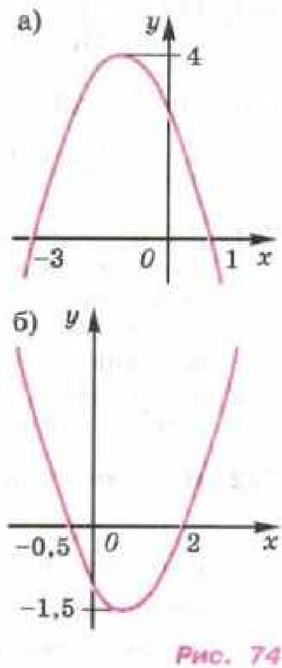


Рис. 74

Решить неравенство (763—767).

763. 1) $(x-5)(x+3)>0$; 2) $(x+15)(x+4)<0$;
3) $(x-7)(x+11)\leqslant 0$; 4) $(x-12)(x-13)\geqslant 0$.

764. 1) $x^2+3x>0$; 2) $x^2-x\sqrt{5}<0$;
3) $x^2-16\leqslant 0$; 4) $x^2-3>0$.

765. 1) $x^2-8x+7>0$; 2) $x^2+3x-54<0$; 3) $\frac{1}{2}x^2+0{,}5x-1>0$;
4) $5x^2+9{,}5x-1<0$; 5) $-x^2-3x+4>0$; 6) $-8x^2+17x-2\leqslant 0$.

766. 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2+24x+144\leqslant 0$; 3) $\frac{1}{2}x^2-4x+8<0$;
4) $\frac{1}{3}x^2+4x+12\geqslant 0$; 5) $4x^2-4x+1>0$; 6) $5x^2+2x+\frac{1}{5}<0$.

767. 1) $x^2-10x+30<0$; 2) $-x^2+x-1<0$; 3) $x^2+4x+5<0$;
4) $2x^2-4x+13>0$; 5) $4x^2-9x+7<0$; 6) $-11+8x-2x^2<0$.

Решить неравенство методом интервалов (768—770).

768. 1) $(x+3)(x-4)>0$; 2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+0{,}7)<0$;
3) $(x-2{,}3)(x+3{,}7)<0$; 4) $(x+2)(x-1)\leqslant 0$.

769. 1) $(x+2)(x-1)\geqslant 0$; 2) $(x+2)(x-1)^2\leqslant 0$;
3) $(x+2)(x-1)^2>0$; 4) $(2-x)(x+3x^2)\geqslant 0$.

770. 1) $\frac{3-x}{2+x}\geqslant 0$; 2) $\frac{0{,}5+x}{x-2}\leqslant 0$;
3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x}<0$; 4) $\frac{2x}{(3+x)(1-x)}<0$.

771. Делая утреннюю зарядку, мальчик ежедневно пробегал от дома до леса 600 м. До леса он бежал одну треть пути со скоростью 2 м/с, а оставшееся расстояние — со скоростью 3 м/с. Возвращаясь к дому, первую треть пути он пробегал со скоростью 3 м/с, а оставшееся расстояние — со скоростью 2 м/с. На какой пробег мальчик тратил времени больше: от дома до леса или от леса до дома?

772. На руднике за день добыли 2000 т руды, содержащей $\frac{17}{25}$ железа от общей массы руды. На соседнем руднике добыли за первую половину дня 1200 т руды, содержащей $\frac{3}{5}$ железа, а за вторую половину дня 1000 т руды, содержащей $\frac{5}{8}$ железа. На каком руднике добыли за день больше чистого железа?

773. На спортивных соревнованиях семиклассник пробежал дистанцию 60 м за 9 с, а десятиклассник — дистанцию 100 м за 14,8 с. Считая, что ученики бежали с постоянными скоростями, выяснить, кто бежал быстрее.

774. Доказать, что:

1) если $(y-3)^2 > (3+y)(y-3)$, то $y < 3$;

2) если $(3a+b)^2 < (3a-b)^2$, то $ab < 0$.

775. Если $x < \frac{a+b}{2}$, $y < \frac{a+c}{2}$, $z < \frac{b+c}{2}$, то $x+y+z < a+b+c$. Доказать.

776. Высота прямоугольного параллелепипеда больше 15 см, ширина больше 2 см, а длина больше 0,3 м. Доказать, что его объём больше 0,9 дм^3.

777. Масштаб физической карты России в учебнике географии 1 : 20 000 000. На карте расстояние: 1) от Москвы до Орла больше 2 см; 2) от Москвы до Рязани меньше 2 см. Каковы эти расстояния в действительности?

778. Груз массой не более 1,6 кг подняли на высоту 8-го этажа (не большую 25 м). Какую при этом совершили работу?

779. Доказать, что на нагревание не менее 2 кг воды в латунном стакане массой не меньше 1 кг от 20 до 70 °С потребуется не менее 438 кДж теплоты. Удельная теплоёмкость воды 4,19 кДж/(кг · °С), латуни 0,38 кДж/(кг · °С).

780. Доказать, что при любых a и b выполняется неравенство $a^2 + 4b^2 - 2a - 12b + 10 \geqslant 0$.

781. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5x - 4 \geqslant x - 3, \\ -2x + 11 > x + 1, \\ 12 - 3x > 4 - 5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x \leqslant 5 - 6x, \\ -3x + 1 \leqslant 4x - 1, \\ 7 - 2x > 2x + 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 2 > 2(x-3) + 5x, \\ 2x^2 + (5+x)^2 > 3(x-5)(x+5); \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8x(x+2)(x-2) < (2x-3)(4x^2+6x+9) - 5x, \\ \left(\frac{1}{4}x + 2\right)\left(2 - \frac{1}{4}x\right) - \left(3 - \frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x + 2\right) > -3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) > 2x(x+3), \\ \frac{x+3}{3} > \frac{3x+4}{2}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \left(3x+\frac{1}{2}\right)(2-x)+\frac{1}{2}(x+1)>3(3-x)(3+x)-1, \\ 2-(2x+3)^2+(3+2x)(2x-3)<-2\frac{1}{3}(9+x)+\frac{1}{3}. \end{cases}$

782. Одна сторона прямоугольника больше другой на 3 см. Какой может быть длина меньшей стороны прямоугольника, если периметр его больше 14 см, но меньше 18 см?

783. За 1 ч улитка проползла меньше 5 м, а за следующие 45 мин, двигаясь с той же скоростью, не менее 3 м. Какова скорость улитки?

784. Если часы в Варшаве (первый часовой пояс) показывают время между 10 и 11 часами, то какое время показывают в этот момент часы во Владивостоке (девятый часовой пояс)?

785. Решить неравенство: 1) $|2x+3|\leqslant 7$; 2) $|5-3x|>4$.

786. Упростить выражение:

1) $a\sqrt{4a}-2a^2\sqrt{\frac{1}{a}}+\frac{1}{3}a\sqrt{25a}$, где $a>0$;

2) $\sqrt{a^3b^5}-6ab\sqrt{ab^3}+0{,}4b^2\sqrt{a^3b}$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

787. Вычислить:

1) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt{13+5\sqrt{4{,}2}}+\sqrt{13-5\sqrt{4{,}2}}\right)^2$;

3) $\sqrt{\frac{\sqrt{25^2-24^2}}{21{,}5^2-14{,}5^2}}$; 4) $\sqrt{\frac{23^2-22^2}{\sqrt{13^2-12^2}}}$.

788. Упростить выражение:

1) $\left(\frac{a+1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}\right):\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}$;

3) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}-\sqrt{1+a}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}-1\right)$;

4) $\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a-\sqrt{a}}-\frac{a}{1+\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}-a\sqrt{3}}{a+1}$.

789. Упростить выражение:

1) $\frac{a+b}{a+2b}:\left(\frac{a}{a-2b}+\frac{b^2}{a^2-4b^2}\right)$;

2) $\left(\frac{b}{b-c}-\frac{bc}{b^2-c^2}\right):\frac{4b^2}{b^2-2bc+c^2}$;

3) $\frac{b^2}{a^2-2ab}:\left(\frac{2ab}{a^2-4b^2}-\frac{b}{a+2b}\right)$;

4) $\left(\frac{2ab}{a^2-9b^2}-\frac{b}{a-3b}\right):\frac{b^2}{a^2+3ab}$.

790. Доказать, что при любом y положительно значение выражения:

1) $(y-3)(y-1)+5$;

2) $(y-4)(y-6)+3$.

791. Найти множество значений k, при которых уравнение $4y^2-3y+k=0$ не имеет действительных корней.

792. При каких значениях k число -2 является корнем уравнения $(k-2)x^2-7x-2k^2=0$?

793. Решить уравнение:

1) $3x^2+8x+5=0$;

2) $5x^2+4x-12=0$;

3) $\frac{6}{4x^2-1}-\frac{x}{2x-1}=\frac{5}{2x+1}$;

4) $\frac{5}{x-1}+\frac{3x-3}{2x+2}=\frac{2x^2+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{30}{x^3-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{7+18x}{x^3-1}$;

6) $\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$.

794. Упростить выражение:

1) $\frac{2x^2+x}{2x-9}\cdot\left(\frac{8x}{4x^2-1}+\frac{9}{2x^2-11x+5}+\frac{9}{5+9x-2x^2}\right)-\frac{10}{x-5}$;

2) $\frac{2y+13}{2y-5}:\left(\frac{2y}{2y^2+3y-20}+\frac{8}{y^2-16}-\frac{3}{2y^2-13y+20}\right)$.

795. Из пункта A выходит пешеход со скоростью 4 км/ч, через 45 мин из пункта A в том же направлении выезжает велосипедист со скоростью 8 км/ч. На каком расстоянии от пункта A велосипедист догонит пешехода?

796. С туристской базы вышла группа лыжников. Через 20 мин вслед за ней вышел опоздавший лыжник, который после 40 мин ходьбы догнал группу. С какой скоростью двигался опоздавший лыжник, если его скорость была больше скорости группы на 5 км/ч?

797. Из пункта A в пункт B выезжает грузовой автомобиль со скоростью 50 км/ч. Через 24 мин вслед за ним выезжает автобус со скоростью 60 км/ч. Каково расстояние между пунктами A и B, если грузовой автомобиль и автобус прибыли в пункт B одновременно?

798. Скорость моторной лодки по течению реки равна 23 км/ч, а против течения 17 км/ч. Найти скорость течения и собственную скорость лодки.

799. Ученик за 3 блокнота и 2 тетради уплатил 400 р., другой ученик за 2 таких же блокнота и 4 тетради уплатил 320 р. Сколько стоил блокнот и сколько стоила тетрадь?

800. Для отправки груза было подано несколько вагонов. Если грузить по 15,5 т в вагон, то 4 т груза останутся непогруженными; если же грузить по 16,5 т в вагон, то для полной загрузки не хватит 8 т груза. Сколько было подано вагонов и сколько было тонн груза?

801. В техникуме для проведения вступительного экзамена было заготовлено 750 листов бумаги. Но так как поступающих оказалось на 45 человек больше, чем предполагалось, то, хотя и добавили ещё 30 листов, каждый получил на один лист меньше. Сколько листов было заготовлено на каждого поступающего первоначально?

802. При испытании двух двигателей было установлено, что расход бензина при работе первого двигателя составил 450 г, а при работе второго — 288 г, причём второй двигатель работал на 3 ч меньше и расходовал бензина в час на 6 г меньше. Сколько граммов бензина расходует в час каждый двигатель?

803. Индусская задача «Стая обезьян»:

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радости двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь,
Обезьян там было в стае?

804. Решить неравенство:

1) $(x+2)^2 < (2x-3)^2 - 8(x-5)$;

2) $\frac{2+x}{9} - x \leqslant \frac{2x-5}{3} - (4-x)^2$;

3) $\frac{(2x-3)(x+2)}{12} - \frac{(x-7)}{3} > \frac{(x-6)^2}{4} + x$;

4) $6x + \frac{(3+5x)^2}{2} > \frac{8-2x}{5} - \frac{(x+3)(x+7)}{2}$.

805. Площадь трапеции больше 19,22 см^2. Средняя линия её вдвое больше высоты. Найти среднюю линию и высоту трапеции.

806. С самолёта, находящегося на высоте, большей 320 м, геологам был сброшен груз. За какое время груз долетит до земли? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

807. Сторона параллелограмма на 2 см больше высоты, опущенной на эту сторону. Найти длину этой стороны, если площадь параллелограмма больше 15 см^2.

808. Решить методом интервалов неравенство:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4)>0$;

2) $(x+1)(3x^2+2)(x-2)(x+7)<0$;

3) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\geqslant 2$;

4) $\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}\geqslant\frac{12}{1-9x^2}$.

809. Найти коэффициенты p и q квадратного трёхчлена x^2+px+q, если этот трёхчлен при $x=0$ принимает значение, равное -14, а при $x=-2$ принимает значение -20.

810. Найти p и q, если парабола $y=x^2+px+q$:

1) пересекает ось абсцисс в точках $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{2}{3}$;

2) касается оси абсцисс в точке $x=-7$;

3) пересекает ось абсцисс в точке $x=2$ и ось ординат в точке $y=-1$.

811. Записать уравнение параболы, если известно, что она пересекает ось абсцисс в точке 5, а её вершиной является точка $\left(2\frac{3}{4};\ 10\frac{1}{8}\right)$.

812. Зеркало отражателя телескопа (рефлектора) имеет в осевом сечении вид параболы (рис. 75). Написать уравнение этой параболы.

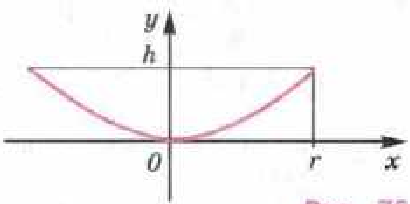


Рис. 75

813. Найти коэффициенты квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если её график:

1) проходит через точки $A(-1;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ и $C(0;\ -6)$;

2) проходит через точки $K(-2;\ 0)$, $L(1;\ 0)$ и $M(0;\ 2)$.

814. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство:

1) $a^2+b^2\leqslant(a+b)^2$;

2) $a^3+b^3\leqslant(a+b)^3$;

3) $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$;

4) $(a+b)^3\leqslant 4(a^3+b^3)$.

815. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$; 2) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$;

3) $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$; 4) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

816. Построить график функции:

1) $y=\sqrt{x^2}$; 2) $y=|x-1|$; 3) $y=\sqrt{x^2-6x+9}$;

4) $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$; 5) $y=\sqrt{x^2-4x+4}+|x+2|$.

817. Найти действительные корни уравнения:

1) $x^2-|x|-2=0$; 2) $x^2-4|x|+3=0$;
3) $|x^2-x|=2$; 4) $|x^2+x|=1$;
5) $|x^2-2|=2$; 6) $|x^2-26|=10$.

818. Доказать, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два действительных корня разных знаков при любом b, если $ac<0$.

819. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2-2rx-7r^2=0$ удовлетворяют условию $x_1^2+x_2^2=18$. Найти r.

820. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-5x+3=0$. Составить квадратное уравнение с корнями x_1^4 и x_2^4, не решая данное.

821. Не вычисляя корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $2x^2+$ $+7x-8=0$, найти:

1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 3) $x_1^4x_2+x_2^4x_1$; 4) $x_1^4+x_2^4$.

822. Найти все такие значения r, при которых квадратное уравнение $x^2+(r-1)x-2(r-1)=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $|x_1-x_2|=3$.

823. Доказать, что если коэффициенты квадратных уравнений

$$x^2+p_1x+q_1=0 \text{ и } x^2+p_2x+q_2=0$$

связаны равенством $p_1p_2=2(q_1+q_2)$, то по крайней мере одно из этих уравнений имеет действительные корни.

824. Квадратичная функция $y=x^2+px+q$ принимает при $x=1$ наименьшее значение, равное -4. Найти $y(0)$.

825. Квадратичная функция $y=-x^2+bx+c$ принимает при $x=1$ наибольшее значение, равное -4. Найти $y(-1)$.

826. Найти коэффициенты a, b, c квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если она при $x=1$ принимает наибольшее значение, равное 3, а $y(0)=0$.

827. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=6$ м/с. Определить, через сколько секунд после начала движения тело достигает наибольшей высоты, если высоту можно найти по формуле $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ (ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2).

828. Разложить многочлен на множители:
1) a^4-2a^2-3; 2) a^4-5a^2+4.

829. Сократить дробь:
1) $\frac{a^2+ab-6b^2}{a^2-ab-2b^2}$; 2) $\frac{2a^2+5ab-3b^2}{4a^2+4ab-3b^2}$; 3) $\frac{8a^3+27b^3}{2a^2+ab-3b^2}$.

830. Найти скорость и длину поезда, зная, что он проходит мимо неподвижного наблюдателя за 7 с и с той же скоростью за 25 с мимо платформы длиной 378 м.

831. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 с. Если пассажир идёт с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 с. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

832. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге с постоянными скоростями в одном направлении, оказываются рядом через каждые 56 мин. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются через каждые 8 мин. За какое время проедет всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

833. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке; скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 с меньше другого. Если они начнут пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?

834. Пешеход и велосипедист отправляются из пункта A в пункт B одновременно. Прибыв в пункт B, велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 20 мин после начала движения. Не останавливаясь, велосипедист доезжает до пункта A, поворачивает обратно и догоняет пешехода через 10 мин после первой встречи. За какое время пешеход пройдёт путь от A до B?

835. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист, и одновременно навстречу ему из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Мотоциклист прибыл в пункт B через 2 ч после встречи с велосипедистом, а велосипедист прибыл в пункт A через 4,5 ч после встречи с мотоциклистом. Сколько часов были в пути мотоциклист и велосипедист?

836. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:

1) $48{,}3+\dfrac{17{,}83\cdot 16{,}94}{8{,}367}$; 2) $67{,}8-\dfrac{8604\cdot 48{,}4}{7651}$;

3) $5{,}31\cdot(3{,}57\cdot 4{,}28-7{,}04)$; 4) $1{,}34\cdot\left(\dfrac{8354}{375}+37{,}6\right)$.

837. Вычислить на микрокалькуляторе приближённо с точностью до 0,01:

1) $34{,}3^2-23{,}1^2+17{,}8^2$; 2) $7{,}62^2+3{,}56^2-6{,}98^2$;

3) $\dfrac{1}{0{,}54}+\dfrac{1}{0{,}32}+\dfrac{1}{0{,}87}$; 4) $\dfrac{1}{0{,}17}-\dfrac{1}{0{,}38}+\dfrac{1}{0{,}87}$.

838. Вычислить на микрокалькуляторе приближённо с точностью до 0,01:

1) $27{,}3\cdot 1{,}28+(43{,}4-39{,}8)\cdot 2{,}34$;

2) $(257-189):2{,}31-(354-487):3{,}14$.

Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1 (839—842).

839. 1) $\sqrt{10}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{\sqrt{130}-\sqrt{8}}$;

3) $31{,}4+\sqrt{820-\sqrt{104}}$; 4) $87{,}3-\sqrt{563+\sqrt{231}}$.

840. 1) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$; 2) $\sqrt{30-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

3) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$; 4) $\sqrt{2\sqrt{3}+4\sqrt{5}}$.

841. 1) $\sqrt{14{,}2^2+89{,}3^2}$; 2) $\sqrt{30{,}2^2-4{,}73^2}$;

3) $\dfrac{123}{\sqrt{11}}-\dfrac{251}{\sqrt{13}}$; 4) $\dfrac{426}{\sqrt{5}}-\dfrac{43}{\sqrt{3}}$.

842. 1) $\dfrac{\sqrt{78}-\sqrt{13}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{99}-\sqrt{13}}{\sqrt{89}-\sqrt{3}}$.

$\boxed{843.}$ С помощью микрокалькулятора найти корни уравнения:
1) $x^2-62x-7503=0$; 2) $x^2+181x+5412=0$;
3) $x^2-9{,}7x+21{,}42=0$; 4) $x^2+1{,}5x-62{,}85=0$.

$\boxed{844.}$ С помощью микрокалькулятора решить уравнение:
1) $x^4-14{,}9x^2+50{,}8369=0$; 2) $x^4-8{,}01x^2+12{,}96=0$.

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ

845. *(Задача Пифагора)* Доказать, что сумма любого числа последовательных нечётных чисел, начиная с единицы, есть точный квадрат.

846. *(Задача Архимеда)* Доказать равенство $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=$ $=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

847. *(Задача Диофанта)* Катет прямоугольного треугольника равен кубу числа, другой катет равен разности между кубом числа и самим числом, а гипотенуза равна сумме куба числа и самого числа. Найти это число.

848. *(Задача Диофанта)* Требуется число 100 разделить два раза так, чтобы бóльшая его часть от первого деления была вдвое более меньшей части от второго деления и чтобы бóльшая часть от второго деления была втрое более меньшей части от первого деления.

849. *(Индийская задача)* Показать, что

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

850. *(Задача О. Хайяма)* Решить уравнение $\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x}=1\frac{1}{4}$.

851. *(Задача ал-Караджи)* Найти число, которое от умножения на $3+\sqrt{5}$ даёт 1.

852. *(Задача Л. Эйлера)* Две крестьянки принесли на рынок 100 яиц, одна больше, нежели другая; обе выручили одинаковые суммы. Первая сказала второй: «Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Сколько яиц было у каждой?

853. *(Задача Э. Безу)* Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этой продаже он потерял столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он её купил?

Задачи повышенной трудности

854. Доказать, что если из трёхзначного числа вычесть трёхзначное число, записанное теми же цифрами, что и первое, но в обратном порядке, то модуль полученной разности будет делиться на 9 и 11.

855. Если между цифрами двузначного числа x вписать это же число, то полученное четырёхзначное число будет в 66 раз больше первоначального двузначного. Найти x.

856. Доказать, что сумма $333^{555}+555^{333}$ делится на 37.

857. Доказать, что сумма $11^{11}+12^{12}+13^{13}$ делится на 10.

858. Какой цифрой оканчивается степень 1982^{1982}?

859. Сколькими нулями оканчивается число, полученное при перемножении всех натуральных чисел от 1 до 100?

860. Доказать, что сумма $10^{15}+10^{17}-74$ делится на 9.

861. Доказать, что значение выражения n^3+11n делится на 6 при любом натуральном n.

862. Доказать, что значение выражения n^3+3n^2+5n+3 делится на 3 при любом натуральном n.

863. Доказать, что при любом целом n значение выражения n^5-n делится на 30.

864. Доказать, что при любом целом n значение выражения n^5-5n^3+4n делится на 120.

865. Найти пятизначное число, если известно, что при умножении этого числа на 9 получается пятизначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

866. Доказать, что разность между трёхзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, не может равняться квадрату натурального числа.

867. Доказать, что если x и y — целые числа, такие, что число $3x+8y$ делится на 17, то $35x+65y$ также делится на 17.

868. Доказать, что сумма квадратов двух нечётных чисел не может быть квадратом натурального числа.

869. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является квадратом натурального числа.

870. Доказать, что ни при каком целом n значение выражения $n^2+5n+16$ не делится на 169.

871. Доказать, что если сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 3, то и каждое из этих чисел делится на 3.

872. Доказать, что ни одно из чисел вида n^3-3, где n — натуральное число, не делится на 7.

873. Доказать, что если p — простое число, большее трёх, то значение выражения p^2-1 делится на 24.

874. Найти все простые числа n такие, что n^2+8 — простое число.

875. Доказать, что если p — простое число и $p \geqslant 5$, то остаток от деления p^2 на 12 равен 1.

876. Доказать, что если n — натуральное число и $n>1$, то n^4+4 — составное число.

877. Найти целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x+y=xy$.

878. Доказать равенство:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{5}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$;

2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\dfrac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}=\dfrac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$;

3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}=\sqrt{99}-1$;

4) $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}=\dfrac{3}{a(a+3)}$;

5) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$.

879. Доказать, что $1980\cdot1981\cdot1982\cdot1983+1$ является квадратом некоторого натурального числа x, и найти x.

880. Доказать равенство:

1) $\dfrac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}=a+b+c$;

2) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$;

3) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$;

4) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$;

5) $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3=24abc$;

6) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(a-c)(c-b)$.

881. Доказать, что из равенства $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ следует равенство $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{1}{a^3+b^3+c^3}$.

882. Доказать, что выражение $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$ не равно нулю, если a, b, c — попарно не равные между собой числа.

883. Если $a \neq b$ и $\frac{a^2-bc}{a(1-bc)}=\frac{b^2-ac}{b(1-ac)}$, то $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Доказать.

884. Пусть $x+y=a$, $xy=b$. Доказать, что:

1) $x^3+y^3=a^3-3ab$;
2) $x^4+y^4=a^4-4a^2b+2b^2$;
3) $x^5+y^5=a^5-5a^3b+5ab^2$;
4) $x^6+y^6=a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3$.

885. Упростить выражение:

1) $\frac{4}{1+x^4}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$;

2) $\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2-ab}{(a+c)(b+c)}$;

3) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $1 \leqslant x<2$;

4) $\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}$, если $x=\frac{2mn}{n^2+1}$, где $m>0$, $0<n<1$.

886. Решить уравнение:

1) $x^2-2|x-1|=2$;
2) $(x+1)|x-2|=2$;
3) $||x-1|-3|=2$;
4) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$;
5) $x^2+3x+\frac{6}{2-3x-x^2}=1$;
6) $\frac{1}{x^2+6x+5}+\frac{18}{x^2+6x+10}=\frac{18}{x^2+6x+9}$;
7) $x^2+\frac{1}{x^2}-5x-\frac{5}{x}+8=0$;
8) $x(x^2-1)(x+2)+1=0$.

887. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+xy=10, \\ y^2+xy=15; \end{cases}$
2) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=6, \\ (x+2)(y+2)=30; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x^2+y^2+xy=19; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2, \\ xy=2(x+y); \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2y^2-4xy+3x^2=17, \\ y^2-x^2=16; \end{cases}$
8) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases}$

888. Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy(x+y)=6, \\ x^3+y^3=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=7, \\ (x+y)(x^2+y^2)=175; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x, \\ 1+y^2=5(1+x^2); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3+y^3+x^2y+xy^2=5, \\ x^4y^2+x^2y^4=20; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2(x+y)=5xy, \\ 8(x^3+y^3)=65; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y), \\ x^3+y^3=7(x+y); \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=9, \\ (x-y)(x^2+y^2)=5; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}. \end{cases}$

889. Найти все значения r, при которых уравнение $x^2+rx+2r-3=0$ имеет:

1) равные корни;

2) действительные корни, модули которых равны, а знаки противоположны.

890. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2-rx-r=0$, где $r>0$, то выполняется неравенство

$$x_1^3+x_2^3+(x_1x_2)^3>0.$$

891. Доказать, что если $(a+b)^2>c^2$ и $(a-b)^2<c^2$, то квадратное уравнение $a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$ не имеет действительных корней.

892. Доказать, что если уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то уравнение

$$x^2+\left(r+\frac{1}{r}\right)px+q\left(r-\frac{1}{r}\right)^2=0$$

также имеет действительные корни при любом $r\neq 0$.

893. Доказать, что если квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, где p и q — целые числа, имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа.

894. Каким условиям удовлетворяют числа a и b, если биквадратное уравнение $x^4-(a+b)x^2+ab=0$ имеет четыре различных действительных корня?

895. Доказать, что если $r<0$, то квадратное уравнение

$$x^2-2(r-1)x+2r+1=0$$

имеет действительные корни. При каких значениях r $(r<0)$ оба корня этого уравнения отрицательны?

896. Найти все значения r, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство
$$(r^2-1)x^2+2(r-1)x+1>0.$$

897. Доказать, что при всех действительных значениях x справедливо неравенство $\frac{1}{3} \leqslant \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \leqslant 3$.

898. Найти все значения a, при которых уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют хотя бы один общий действительный корень.

899. Пусть a, b, c — различные числа, причём $c \neq 0$. Доказать, что если уравнения $x^2+ax+bc=0$ и $x^2+bx+ca=0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений являются корнями уравнения $x^2+cx+ab=0$.

900. Найти все значения r, при которых корни квадратного уравнения $(r-4)x^2-2(r-3)x+r=0$ положительны.

901. Доказать, что корни уравнения $x^2+px+q=0$ действительные и отрицательные только тогда, когда $p^2-4q \geqslant 0$, $p>0$, $q>0$.

902. Найти все значения r, при которых корни уравнения $2rx^2-(r+1)x+1=0$ действительны и оба по модулю меньше единицы.

903. Известно, что корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ по модулю больше единицы и имеют разные знаки. Доказать, что $p+q+1<0$, $q-p+1<0$.

904. Известно, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней. Определить знак числа c, если:
1) $a+b+c>0$; 2) $a-b+c<0$.

905. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ и пусть $s_m=x_1^m+x_2^m$, где m — натуральное число, $m \geqslant 2$. Доказать, что $as_m+bs_{m-1}+cs_{m-2}=0$.

906. Доказать, что выражение $3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-8\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+10$ принимает неотрицательные значения при любых значениях a и b, не равных нулю.

907. Доказать, что при любых действительных значениях x и y справедливо неравенство $x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0$.

908. Найти все значения a, при которых вершины двух парабол $y=x^2-2(a+1)x+1$ и $y=ax^2-x+a$ лежат по разные стороны от прямой $y=\frac{3}{4}$.

909. Найти все значения a, при которых вершины двух парабол $y=4x^2+8ax-a$ и $y=4ax^2-8x+a-2$ лежат по одну сторону от прямой $y=-5$.

910. Разложить на множители:

1) x^3-6x^2-x+30;
2) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$;
3) $x^4-x^3-7x^2+x+6$;
4) $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

911. Разложить многочлен x^5+x+1 на два множителя с целыми коэффициентами.

912. Сократить дробь:

1) $\dfrac{x^6+x^4-x^2-1}{x^3+x^2+x+1}$;
2) $\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^3-3x-2}$;
3) $\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$;
4) $\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{2x^3+5x^2+4x+1}$;
5) $\dfrac{x^4-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}$.

913. Построить график функции:

1) $y=|x^2-2x|$;
2) $y=|x^2+x|$;
3) $y=|x^2-5x+6|$;
4) $y=|x^2-x-2|$;
5) $y=x^2-|x|$;
6) $y=x^2-2|x|-3$;
7) $y=|x^2-3|x|-4|$;
8) $y=|x^2-6|x|+5|$.

914. Решить неравенство:

1) $\dfrac{5-4x}{3x^2-x-4}<4$;
2) $\dfrac{19-33x}{7x^2-11x+4}>3$;
3) $\dfrac{x^4-x^2-12}{x^3+1}>0$;
4) $\dfrac{x^4-8x^2-9}{x^3-1}<0$;
5) $|x^2-5x|\geqslant 6$;
6) $|2x+3|>|4x-3|$;
7) $|x^2+4x+3|>|x+3|$;
8) $|x^2-x+1|\leqslant|x^2-3x+4|$.

915. Доказать, что для любых чисел a и b справедливо неравенство:

1) $a^2+b^2\geqslant 2(a+b-1)$;
2) $2a^2+5b^2\geqslant 2ab$;
3) $a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$;
4) $a^2+ab+b^2\geqslant 0$;
5) $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$;
6) $(a^2+b^2)(a^4+b^4)\geqslant(a^3+b^3)^2$.

916. Доказать, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство:

1) $a+\dfrac{1}{a}+b+\dfrac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{ab}+\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$;
2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+1\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

917. Доказать, что для любых чисел a, b, c выполняется неравенство:

1) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$;
2) $(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.

Краткое содержание курса алгебры VII класса

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Числовое выражение образуется из чисел с помощью знаков действий и скобок. Например, $1{,}2\cdot(-3)-9:(0{,}5+1{,}5)$ — числовое выражение.

Порядок выполнения действий.

Действия первой ступени — сложение и вычитание.
Действия второй ступени — умножение и деление.
Действия третьей ступени — возведение в степень.

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; при этом действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны.
2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключёнными в скобках, а затем все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в порядке, указанном в п. 1.
3) Если вычисляется значение дробного выражения, то сначала выполняются отдельно действия в числителе дроби и в знаменателе, а затем первый результат делится на второй.
4) Если выражение содержит скобки, заключённые внутри других скобок, то сначала выполняются действия во внутренних скобках.

Алгебраическое выражение образуется из чисел и букв с помощью знаков действий и скобок. Примеры алгебраических выражений:

$$2(m+n);\ \ 3a+2ab-1;\ \ (a-b)^2;\ \ \frac{2x+y}{3}.$$

Числовое значение алгебраического выражения — число, полученное в результате вычислений после замены в этом выражении букв числами. Например, числовое значение выражения $3a+2ab-1$ при $a=2$ и $b=3$ равно $3\cdot2+2\cdot2\cdot3-1=17$.

Алгебраическая сумма — запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединённых знаками «+» или «−».

Правила раскрытия скобок.

1) Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключённая в скобки, то скобки и знак «+» перед скобками можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы. Например,

$$14+(7-23+21)=14+7-23+21, \quad a+(b-c-d)=a+b-c-d.$$

2) Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключённая в скобки, то скобки и знак «−» перед скобками можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный. Например,

$$14-(7-23+21)=14-7+23-21, \quad a-(b-c-d)=a-b+c+d.$$

2. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Уравнение — равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой. Пример уравнения: $2x+3=3x+2$, где x — неизвестное число, которое нужно найти.

Корень уравнения — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство. Например, число 3 является корнем уравнения $x+1=7-x$, так как $3+1=7-3$.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Линейное уравнение — уравнение вида $ax=b$, где a и b — заданные числа, x — неизвестное.

Основные свойства уравнений.

1. Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.
2. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

3. ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

Степень числа a с натуральным показателем n, большим единицы, — произведение n множителей ($n \geqslant 2$), равных a, т. е. $a^n=\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$. Первая степень числа a — само это число.

Например, $2^3=2 \cdot 2 \cdot 2$, $m^5=m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$.

В записи степени a^n число a — основание степени, n — показатель степени. Например, в записи степени 2^3 число 2 — основание степени, число 3 — показатель степени.

Основные свойства степени.

1) При умножении степеней с равными основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней складываются:
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$
2) При делении степеней с равными основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней вычитаются:
$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$
3) При возведении степени в степень основание остаётся прежним, а показатели перемножаются:
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$
4) При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель:
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$
5) При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Стандартный вид числа, большего 10, — запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — натуральное число. Например, $358 = 3{,}58 \cdot 10^2$; $4084{,}5 = 4{,}0845 \cdot 10^3$.

Одночлен — произведение числовых и буквенных множителей. Примеры одночленов: $3ab$, $-2ab^2c^3$, a^2, a, $0{,}6xy5y^2$, $-t^4$. Например, числовыми множителями одночлена $3a^2(0{,}4) \cdot b \cdot (-5)c^3$ являются: 3; 0,4; –5, а буквенными — a^2, b, c^3.

Одночлен стандартного вида — одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями.

Чтобы записать одночлен в стандартном виде, нужно перемножить все его числовые множители и результат поставить на первое место, затем произведения степеней с одинаковыми буквенными основаниями записать в виде степеней.

Коэффициент одночлена — числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде. Например, коэффициент одночлена $\frac{3}{4}abc^2$ равен $\frac{3}{4}$, коэффициент одночлена $-7a^3b$ равен –7, коэффициент одночлена a^3bc равен 1, коэффициент одночлена $-ab^2$ равен –1.

Многочлен — алгебраическая сумма нескольких одночленов. Примеры многочленов: $4ab^2c^3$ — одночлен; $2ab - 3bc$ — двучлен; $4ab + 3ac - bc$ — трёхчлен.

Члены многочленов — одночлены, из которых состоит многочлен. Например, членами многочлена $2ab^2 - 3a^2c + 7bc - 4bc$ являются одночлены $2ab^2$, $-3a^2c$, $7bc$, $-4bc$.

Подобные члены — одночлены, которые после приведения многочлена к стандартному виду отличаются только коэффициентами, или одинаковые одночлены. Например, в многочлене $2ab - 3ba + c^2b + c^2b$ подобными членами являются $2ab$ и $-3ba$, c^2b и c^2b.

Приведение подобных членов — упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом. Например, $2ab - 4bc + ac + 3ab + bc = 5ab - 3bc + ac$.

Стандартный вид многочлена — запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Действия над одночленами и многочленами.

1) Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены. Например,

$$(2a^2b - 3bc) + (a^2b + 5bc) - (3a^2b - bc) =$$
$$= 2a^2b - 3bc + a^2b + 5bc - 3a^2b + bc = 3bc.$$

2) Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить. Например,

$$(2ab - 3bc)(4ac) = (2ab)(4ac) + (-3bc)(4ac) = 8a^2bc - 12abc^2.$$

3) Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например,

$$(5a - 2b)(3a + 4b) = (5a)(3a) + (5a)(4b) +$$
$$+ (-2b)(3a) + (-2b)(4b) = 15a^2 + 14ab - 8b^2.$$

4) Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить. Например,

$$(4a^3b^2 - 12a^2b^3) : (2ab) = (4a^3b^2) : (2ab) + (-12a^2b^3) : (2ab) = 2a^2b - 6ab^2.$$

4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Формулы сокращённого умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов.

При разложении многочлена на множители используются следующие способы.

1) **Вынесение общего множителя за скобку.** Например,

$$3ax + 6ay = 3a(x + 2y).$$

2) **Способ группировки.** Например,

$$a^3 - 2a^2 - 2a + 4 = (a^3 - 2a^2) - (2a - 4) =$$
$$= a^2(a - 2) - 2(a - 2) = (a - 2)(a^2 - 2).$$

3) **Применение формул сокращённого умножения.** Например,

$$9x^2 - \frac{1}{16}y^2 = \left(3x - \frac{1}{4}y\right)\left(3x + \frac{1}{4}y\right),$$

$$27x^3 + 8y^6 = (3x + 2y^2)(9x^2 - 6xy^2 + 4y^4), \quad z^2 - 14z + 49 = (z - 7)^2.$$

5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Алгебраическая дробь — дробь, числитель и знаменатель которой — алгебраические выражения. Примеры алгебраических дробей: $\frac{a^2 + b}{c}$, $\frac{3x - 2y}{a + 1}$. Предполагается, что буквы, употребляемые в записи алгебраической дроби, могут принимать только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Основное свойство дроби: при умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь. Например, $\frac{a - b}{a + b} = \frac{(a - b)(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{(a - b)^2}{a^2 - b^2}$.

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя. Например, $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Сложение и вычитание алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для обыкновенных дробей. Для нахождения алгебраической суммы двух или нескольких дробей эти дроби приводят к общему знаменателю и используют правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Например, общий знаменатель дробей $\frac{1}{a^2b}$ и $\frac{1}{ab^2}$ равен a^2b^2, поэтому $\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} = \frac{b}{a^2b^2} + \frac{a}{a^2b^2} = \frac{b + a}{a^2b^2}$.

Умножение и деление алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для обыкновенных дробей. Например,

$$\frac{2a}{3b} \cdot \frac{b^2}{4a} = \frac{2ab^2}{3b \cdot 4a} = \frac{1}{6}b, \quad \frac{x^2-y^2}{2xy} : \frac{x+y}{4x} = \frac{(x^2-y^2) \cdot 4x}{2xy(x+y)} = \frac{2(x-y)}{y}.$$

6. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК

Прямоугольная система координат на плоскости — две взаимно перпендикулярные прямые с выбранными направлениями и единицей длины.

Эти прямые называются осями координат: прямая, изображаемая горизонтально, — осью абсцисс, а прямая, изображаемая вертикально, — осью ординат.

Начало координат обозначается буквой O, ось абсцисс — Ox, ось ординат — Oy.

Координатная плоскость — плоскость, на которой выбрана система координат.

Функция. Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие по некоторому правилу число y, то говорят, что на этом множестве определена функция. При этом x называют независимой переменной, а $y(x)$ — зависимой переменной или функцией.

Линейная функция — функция вида $y=kx+b$, где k и b — заданные числа.

График функции $y(x)$ — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x;\ y(x))$. Например, график функции $y(x)=2x+1$ — множество всех точек плоскости с координатами $(x;\ 2x+1)$.

График линейной функции $y=kx+b$ — прямая. При $b=0$ функция принимает вид: $y=kx$, её график проходит через начало координат.

Прямая пропорциональная зависимость: $y=kx$, где $k>0$, $x>0$, k — коэффициент пропорциональности. Например, в формуле $s=vt$ путь s прямо пропорционален времени t при постоянной скорости v.

Обратная пропорциональная зависимость: $y=\frac{k}{x}$, где $k>0$, $x>0$, k — коэффициент обратной пропорциональности. Например, в формуле $V=\frac{m}{\rho}$ объём газа V обратно пропорционален плотности ρ при постоянной массе m.

7. СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Общий вид системы линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — заданные числа,
x, y — неизвестные числа.

Решение системы — пара чисел x, y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое её уравнение в верное равенство. Например, решением системы $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ 5x + y = 7 \end{cases}$ является пара чисел $x = 1$, $y = 2$.

Решить систему — это значит найти все её решения или установить, что их нет. При решении систем уравнений применяются следующие способы.

1) **Способ подстановки.** Из какого-нибудь уравнения одно из неизвестных выражают через другое и подставляют в другое уравнение системы.
2) **Способ алгебраического сложения.** Уравняв модули коэффициентов при одном из неизвестных, почленным сложением или вычитанием уравнений системы исключают это неизвестное.
3) **Графический способ.** В одной системе координат строят графики уравнений системы; по взаимному расположению прямых определяют число решений системы; находят координаты общих точек графиков (если они имеются).

8. КОМБИНАТОРИКА

Правило произведения. Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Например, с помощью букв a, b и c можно составить $3 \cdot 3 = 9$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы могут повторяться, и $3 \cdot 2 = 6$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы должны быть различными.

Ответы

Глава I. **5.** 2) 18; 4) –2. **16.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x_1=-4$, $x_2=-5$. **17.** 2) $x_1=-1{,}5$, $x_2=-1$; 4) $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=-\frac{2}{3}$. **18.** 2) $x_1=0$, $x_2=1$; 4) $x_1=0$, $x_2=-\frac{4}{3}$. **19.** 2) $x_1=4$, $x_2=-4$; 4) $x_1=\frac{4}{7}$, $x_2=-\frac{4}{7}$. **20.** 2) $x=1$; 4) $x=-\frac{1}{2}$. **21.** 2) $x=-1$; 4) $x=\frac{1}{3}$. **22.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x_1=-3$, $x_2=2$; 6) $x=3$. **23.** 2) $x_1=7$, $x_2=-7$; 4) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{5}$. **24.** 1) $x=10$; 2) $x=-\frac{1}{7}$; 3) корней нет; 4) корней нет. **25.** 1) Указание. Левую часть неравенства представить в виде дроби. **26.** 1) –1; 2) 0. **28.** 2) $\frac{1}{3}>0{,}3$; 4) $-\frac{5}{8}>-0{,}7$. **29.** 2) $b>a$; 4) $a<b$. **31.** 2) При $a=-0{,}8$ меньше, чем при $a=-\frac{5}{6}$. **34.** Первый. **36.** Указание. Доказать равенство $a^4+b^4-a^3b-ab^3=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$. **39.** 2) $a<0$; 4) $a>0$. **40.** 2) $-9<-3$. **41.** 2) $a+3b>-2b$. **42.** 2) $8>6$. **43.** 2) $a-3b<3a$. **44.** 2) $a-5<b-5$. **47.** 2) $19>12$; 4) $-12>-14$. **48.** 2) $a<-0{,}25$; 4) $a<2$. **49.** 2) $0{,}9>-2$; 4) $5>3$. **50.** 2) $a<-2$; 4) $x<-\frac{4}{9}$. **52.** 2) $0{,}19a<0{,}19b$; 4) $-\frac{a}{6}>-\frac{b}{6}$; 6) $\frac{2}{3}(a-5{,}2)<\frac{2}{3}(b-5{,}2)$. **55.** 1) Да, при $b<0$; 2) да, при $b>0$; 3) да, при $b=0$; 4) да, при $b<0$; 5) да, при $a>2b$; 6) да, при $a=2b$. **58.** 1) Нет, верно только при $b>0$; 2) нет, верно только при $b>0$; 3) нет, верно только при $ab>0$; 4) верно. **60.** 2) $-5<7$; 4) $7y>1$. **61.** 2) $25<58$; 4) $12<4x^2-1$. **75.** 2) $n=3$; 4) $n=-6$; 6) $n=-1$. **76.** 2) $n=6$; 4) $n=-3$; 6) $n=4$. **77.** 2) $x=-9$. **78.** 2) $h\geqslant 5$; 4) $v\leqslant 60$. **79.** 2) Верно; 4) неверно. **80.** 2) Верно; 4) неверно. **84.** 2) $13-x<2$; 4) $2(x-3)\leqslant 2$; 6) $2x(-4)\geqslant x-(-4)$. **85.** 2) –2; –5; 4) $\frac{1}{2}$; 0; –1; –2; –5. **86.** 2) $y>0$; 4) при любом y; 6) $y\neq -2$. **87.** 2) $y<2$; 4) $y\leqslant 0$. **88.** 2) $x\leqslant -3$; 4) $x>0$; 6) $x<0$. **90.** 2) $x<14$; 4) $y>9$; 6) $z\leqslant 4$. **91.** 2) $x\geqslant -8$; 4) $z>-15$; 6) $x\leqslant -2$. **92.** 2) $x<6$; 4) $x>5$; 6) $x\leqslant -2$. **93.** 2) $x\geqslant 3$; 4) $x>0$; 6) $x\geqslant 2$. **94.** 2) $x<\frac{5}{8}$; 4) $x<-3$; 6) $x<5\frac{1}{6}$. **95.** 2) $y>\frac{3}{8}$; 4) $y<\frac{5}{8}$; 6) $y>\frac{2}{3}$. **96.** 2) $y=4$; 4) $x=0$. **97.** 2) $x=-1$; 4) $x=-4$. **98.** 2) $x>2{,}5$; 4) $y>-4$. **99.** 2) $x\geqslant \frac{1}{3}$; 4) $x>\frac{5}{11}$. **100.** 2) $b<-5\frac{2}{3}$. **101.** 2) x — любое число; 4) x — любое число; 6) x — любое число. **102.** 2) Решений нет; 4) решений нет. **103.** 2) $x<1\frac{1}{6}$; 4) $x\leqslant 6$. **104.** 2) $x>2$; 4) $x>-20$; 6) $x>0{,}5$. **105.** 2) $x<1{,}6$; 4) $x<0$. **106.** 2) $x\leqslant 7$; 4) $x\leqslant 5$. **107.** 2) $x<0{,}5$; 4) $x>-0{,}5$. **108.** Не менее 37 платформ. **109.** Не менее 43 деталей. **110.** 2) 20 см. **111.** 11. **112.** 14. **113.** Не менее 16 км/ч. **114.** Больше 31 км/ч. **115.** $x>-0{,}7$. **116.** $x<2$. **117.** На 63 см. **118.** 2) 10; 12. **119.** 2) 1; 2. **120.** 2) 0; 1; 2; 3; 4) –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5. **121.** 2) [–1; 3];

4) (1; 2); 6) (−4; −2]. **122.** 2) $-3 \leqslant x \leqslant -1$; 4) $0 < x < 3$; 6) $-2 \leqslant x < 2$. **123.** б) $-1 < x < 2$, $(-1;\ 2)$; г) $-4 < x \leqslant 0$, $(-4;\ 0]$. **124.** Да. **125.** Да. **127.** б) $-3 < x < 1$; таких значений x не существует; г) $-5 < x < 0$; таких значений x не существует. **128.** 1) $x \leqslant 0{,}6$; 2) $x \leqslant -\frac{1}{3}$; 3) $x \geqslant -3{,}5$; 4) $x \geqslant -4{,}5$. **129.** 2) $x > 0$; 4) $x \geqslant -2$. **130.** 2) $x < -1$; 4) $x \leqslant 0$. **131.** 2) $3 < x < 6$; 4) $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$. **132.** 2) $-1{,}5 \leqslant x < 1{,}5$; 4) $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 7{,}5$. **133.** 2) $x \geqslant 4$; 4) $x > -3$. **134.** 2) $x \leqslant -2$; 4) $x < 4$. **135.** 2) $x \leqslant -2{,}5$; 4) $2 \leqslant x \leqslant 5$. **136.** 2) $-5 < x \leqslant -1$; 4) $0 < x \leqslant \frac{4}{3}$. **137.** 2) $-0{,}5 < x \leqslant 2$; 4) $x > 0$. **138.** 2) $2{,}1 < x \leqslant 3{,}5$; 4) $4{,}5 < x < 6{,}5$. **139.** 2) $x > -17$. **140.** 2) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; 4) $-2 < x < 1$. **141.** 2) 1; 2; 4) 4; 5. **142.** 2) Таких значений x не существует; 4) $0 < x < 2$. **143.** 2) $x \leqslant -2$; 4) $x \leqslant 6$. **144.** 2) Больше 4 м, но меньше 13 м. **145.** 24. **146.** 36. **147.** Не меньше 8 л, но не больше 24 л. **148.** Риса больше 20 кг, но не больше 40 кг; ячменя больше 80 кг, но не больше 160 кг. **150.** 2) $x_{1,2} = \pm 1{,}5$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -6$. **151.** 2) $x = 2$; 4) $x = \frac{3}{4}$. **152.** 2) $x_1 = -0{,}25$, $x_2 = -1{,}25$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **153.** 2) $x_{1,2} = \pm 2{,}1$; 4) $x_1 = -5$, $x_2 = 11$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}5$. **155.** 2) $-2 < x < 2$. **156.** 2) $|x| \leqslant 0{,}3$. **157.** 2) $-2{,}2 < x < -1{,}8$; 4) $\frac{1}{4} < x < 1\frac{3}{4}$. **158.** 2) $-3 < x < 0$; 4) $1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$. **159.** 2) $x \leqslant 0{,}9$, $x \leqslant 3{,}1$; 4) $x < 2\frac{1}{3}$, $x > 3\frac{2}{3}$. **160.** 2) $x < -1$, $x > -\frac{1}{3}$; 4) $x \leqslant 0$, $x \geqslant 1{,}6$. **161.** 2) −1; 0; 4) 0; 1. **162.** 2) $-1 \leqslant x \leqslant 1\frac{2}{3}$; 4) $x \leqslant 0$, $x \geqslant 3$; 6) $x \leqslant -2$, $x \geqslant 5$. **163.** 2) $\frac{2}{3} \leqslant x < 1\frac{1}{3}$; 4) $-3\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant -3$. **164.** 2) $x \leqslant 2$. **165.** 2) Положительно; 4) отрицательно. **166.** 2) $a > 0$; 4) $a < 0$. **170.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$; 4) $x_1 = -4$, $x_2 = 0{,}5$. **171.** 2) $x = 0{,}5$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. **172.** 2) $2 + b - a > 0$; 4) $a - 3 - b < 0$. **178.** 2) y — любое число; 4) $x > 7$. **179.** 2) $x < 2$. **180.** б) $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $|x| \leqslant 3$; г) $0 < x < 4$, $|x - 2| < 2$; е) $-6 < x < -2$, $|x + 4| < 2$. **181.** б) $|x| > 2$; г) $|x - 3| \geqslant 1$; е) $|x + 4| > 1$. **182.** 2) $x_1 = 3{,}4$, $x_2 = -1{,}4$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **183.** 2) $x \leqslant -2{,}4$, $x \geqslant 4{,}4$; 4) $x \leqslant -2$, $x \geqslant 1$; 6) $x \leqslant -0{,}3$, $x \geqslant 0{,}7$. **186.** 2), 4) Таких значений не существует. **187.** 2) $x = 4\frac{5}{9}$; 4) решений нет. **188.** 34. **189.** 47. **190.** 7 деталей. **191.** 24 места. **193.** Больше a км/ч, но не больше $2a$ км/ч. **194.** Не менее 15 л. **196.** 1) $x = 1{,}5$; 2) $x = 6{,}5$; 3) $x = 0{,}5$; 4) $x = 1$; 5) $x = -5$; 6) $x = -8$.

Глава II. **199.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{225}$. **200.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{350}$. **201.** 2) 0,08; 4) 0,08. **202.** 3°. **203.** $\frac{1}{7}$. **204.** Верно. **205.** $2{,}3 < x < 2{,}5$. **206.** $7{,}42 < x < 7{,}44$. **208.** 2) $141 \leqslant m \leqslant 143$; 4) $895 \leqslant v \leqslant 905$; 6) $m - n \leqslant y \leqslant m + n$. **209.** 2) 2,6 и 2,8; 4) −6,1 и −5,7. **210.** 2) Нет; 4) да. **211.** 2) Да; 4) нет. **212.** 2) 5,5; 4) 3,9; 6) 0,575. **217.** Нет. **222.** 2) 0,7; 4) 3,7. **223.** 2) 0,07; 4) 1,67; 6) 5,07. **224.** 2) 0,385; 4) 7,643. **225.** 1) В первом. **226.** 50 км/ч. **228.** 2) 0,41;

$\approx 3{,}7\%$; 4) 0,108; 10,8%. **229.** 2) $\approx 2\%$. **230.** 2) Второе. **231.** $\approx 1\%$; 0,1%; 0,01%. **232.** Первый. **233.** 2) 0,000398. **234.** Второе. **235.** $\approx 0{,}22\%$. **236.** Первое. **239.** 2) 6; 0 — верные цифры, 7 — сомнительная цифра; 4), 6), 8) — все цифры верные. **240.** 2) $x = 2{,}7 \pm 0{,}1$; 4) $x = 4{,}3204 \pm 0{,}0001$; 6) $x = 350 \pm 1$; 8) $x = 2{,}4 \cdot 10^3 \pm 10^2$. **241.** 2) 11,3; 4,5; 4) 65,70; 12,76; 6) 9,4; 1,8. **242.** 2) 6,9; 3,7; 4) 15,1; 2,5. **243.** 2) 4,5; 2,7. **244.** 2) $10{,}8 \cdot 10^2$; $4{,}0 \cdot 10^2$; 4) $5{,}34 \cdot 10^3$; $2{,}86 \cdot 10^3$; 6) 177; 65. **245.** 2) 0,68; 0,00065; 4) $2{,}8 \cdot 10^8$; $1{,}6 \cdot 10^0$; 6) $1{,}886 \cdot 10^{-2}$; $1{,}756 \cdot 10^0$. **255.** 2) 14,004; 4) 2,615. **256.** 153,68 г. **257.** $\approx 4{,}72$ м³. **258.** 1414,08 мм². **259.** 2) –1,22. **261.** 2) $6 \times \times 10^{-8}$; 4) $3 \cdot 10^{-8}$. **262.** 2) $4{,}3024 \cdot 10^2$; 4) $3{,}6021 \cdot 10^3$; 6) $6{,}8345 \cdot 10^{-2}$; 8) $1{,}2345678 \cdot 10^7$. **263.** 3) $-4{,}50102 \cdot 10^2$; 5) $-4{,}53 \cdot 10^{-1}$; 6) $-3{,}54001 \cdot 10^0$; 8) $-1{,}2345678 \cdot 10^4$. **265.** 2) 0,23; 4) 0,0023. **266.** 2) 0,702; 4) 0,049. **267.** 2) $-1{,}4444 \cdot 10^8$; 4) $-2{,}8831 \cdot 10^{-3}$. **268.** 2) 40 238; 4) 554 764 530. **269.** 2) $1{,}828624 \cdot 10^{15}$; 4) 29,2521. **270.** 2) $3 \cdot 10^{16}$; 4) $\approx 1{,}98 \cdot 10^2$. **271.** 1) 0,0014 г; 2) 1,4513 г; 3) 0,5077 г; 4) 0,0710 г. **272.** 1) 463,7; 2) –69,2. **273.** 2) 547,56; 4) 25 281; 5) $1{,}9881 \cdot 10^{-4}$. **274.** 1) $4{,}7619 \cdot 10^{-2}$; 3) $-7{,}1428 \cdot 10^{-2}$; 4) $-1{,}2315 \cdot 10^{-1}$; 6) 12,345679. **275.** 1) 9261; 3) 702,75; 4) $3{,}0389 \cdot 10^{-7}$; 6) 5,6689342. **276.** 2) 0,3075; 4) 25,575447; 6) 1,2458472. **277.** 3 667 225 м². **278.** 2) $7{,}8633047 \cdot 10^{-23}$. **279.** 1) 437,67; 2) 52,13. **280.** –1,37; –30,11; 1,77; 12,33. **281.** 2) ≈ 206; 4) $\approx -9{,}625$. **282.** 2) 0,3997638; 4) 0,2408157. **283.** $\approx 38{,}6$ см; ≈ 70 см². **284.** $\approx 5{,}2$ м. **285.** 2) 25 575; 3) 453. **286.** 2) 0,98. **287.** 2) 3,08; 4) 15,7; 6) 2,25. **288.** 2) 45,4; 4) 3711,8. **289.** $\approx 2{,}225$ у. е. **290.** $\approx 0{,}4$ мм. **291.** ≈ 14 А. **292.** $\approx 1{,}60$ Ом. **293.** $\approx 1{,}6$ А. **294.** 3) 55 528 000; 4) $-2{,}1111 \cdot 10^{32}$. **295.** 2) $3{,}8261 \cdot 10^{16}$; 4) $1{,}2678 \cdot 10^{-3}$. **296.** 2) 4765; 4) 53,24427. **297.** 2) –3,9. **298.** 2) 64,102052. **299.** $\approx 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ Ом. **300.** ≈ 67 Дж. **301.** $\approx 1{,}5 \cdot 10^5$ Дж. **302.** $1{,}88 \cdot 10^4$; $2{,}04 \cdot 10^4$; $1{,}32 \cdot 10^4$; $4{,}60 \cdot 10^3$. **303.** 2) –0,5843. **304.** 4,2; 2,7; 2,4; 2,2. **305.** 3593,1 ккал.

Глава III. **306.** 2) 10 дм; 4) $\frac{6}{7}$ мм. **307.** 9; 8; 10; 0,4; 0,3; 0,5; 1,2; 70; 80. **308.** 2) Верно; 4) верно. **309.** 2) 9; 4) 0,25. **310.** 1) 2; 3) 0,4; 5) 0,125. **311.** 2) 9; 4) 5; 6) 8. **312.** 2) 10; 0; 20. **313.** 2) $a \leqslant 0$; 4) $a \geqslant -3$. **314.** 2) $x = 100$. **315.** 2) $\sqrt{0{,}04} < \sqrt{0{,}09}$. **317.** 2) 0,008; 4) 0,(27); 6) –3,(142857). **318.** 2) $\frac{7}{9}$; 4) $\frac{131}{55}$. **319.** 2) $1{,}03 < 1{,}0(3)$; 3) $3{,}7(2) > 3{,}72$. **322.** 2) 3,606; 4) 2,074; 6) 0,224. **323.** 3 м 46 см. **324.** 4) 28,0; 6) 12,4. **325.** 2) 47,9; 4) 177,5; 6) 1,5. **326.** 1) 2,66; 2) 1,44; 3) 3,13. **327.** 2) Верно; 4) верно. **328.** 2) 2; 4) 2. **329.** 2) 16; 4) 121; 6) 125. **330.** 2) x^6; 4) $|b^3|$. **331.** 2) 0; 4) 6. **332.** 2) $2{,}7 > \sqrt{7}$; 4) $\sqrt{18{,}49} = 4{,}3$. **334.** 2) $12 < \sqrt{160} < 13$; 4) $2 < \sqrt{8{,}7} < 3$. **335.** 2) $\sqrt{5} - 2$; 4) $4 - \sqrt{15}$. **336.** 2) $-a - 3$; 4) $3b - a$. **338.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $x \leqslant 2$. **339.** 1) 0,41; 2) 0,24. **340.** 2) 1,3; 4) 72. **341.** 2) 40; 4) 18. **342.** 2) 78; 4) 42. **343.** 2) 30; 4) 22; 6) $\frac{1}{2}$. **344.** 2) 80; 4) 25. **345.** 2) 392; 4) 108. **346.** 2) 7; 4) 30. **347.** 2) $x\sqrt{2}$; 4) $a^3\sqrt{3}$. **348.** 2) $5a\sqrt{3}$;

4) $5a\sqrt{2a}$. **349.** 2) $3\sqrt{2}$; 4) $1-2\sqrt{5}$; 5) $8\sqrt{3}$. **350.** 2) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{3}$. **351.** 2) $\sqrt{2a^2}$; 4) $\sqrt{3x}$. **352.** 2) $2\sqrt{40}=4\sqrt{10}$; 3) $2\sqrt{45}<4\sqrt{20}$. **353.** 2) $4x\sqrt{x}$. **354.** 2) 1. **355.** 2) $8\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{2}$. **356.** 2) $0,6ab\sqrt{ab}$. **357.** 2) $(\sqrt{b}-4)(\sqrt{b}+4)$; 4) $\left(\sqrt{b}-\frac{3}{7}\right)\left(\sqrt{b}+\frac{3}{7}\right)$. **358.** 2) $\sqrt{b}-4$; 4) $0,9-\sqrt{b}$. **359.** 1) 34,2; 2) 88; 3) 64,8; 4) 75,3; 5) 39,5; 6) 14,5. **362.** 2) $1\frac{3}{7}$; 4) $2\frac{1}{3}$. **363.** 2) 0; 4) $-\frac{19}{45}$. **364.** 2) 4; 4) 12. **365.** 2) $7\frac{14}{15}$; 4) $3\frac{3}{4}$. **366.** 2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 4) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$; 6) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 8) $9+4\sqrt{5}$. **367.** 2) 0,36; 4) 2,52. **368.** В 6 раз. **369.** 2) $\frac{11x^2}{8}$; 4) $-\frac{20}{a}$. **370.** 2) а) -1; б) 1. **371.** 4) 1. **373.** 2) $\sqrt{x}+3\sqrt{y}$. **374.** 1) 1,19; 2) 0,61; 3) 6,43; 4) 9,63; 5) 0,78. **377.** 2) 0,1; 4) $3\frac{1}{3}$. **378.** 2) $\sqrt{0,3}$; 4) 5. **379.** 2) 540; 3) 195. **380.** 2) 28; 4) 20. **381.** 2) 3; 4) $\frac{2}{3}$. **382.** 2) 27; 4) 216; 6) 49. **383.** 2) 1,5; 4) $-4+0,1\sqrt{6}$; 6) $-2\sqrt{2}-10\sqrt{3}$. **384.** 2) $x(x-\sqrt{3})$; 4) $\frac{1}{\sqrt{b}-4\sqrt{a}}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **385.** 2) $x=16$; 4) $x=4$. **386.** 2) $x\geqslant 3$; 4) $x\geqslant 2,5$. **387.** 2) а) $7-2a$; б) 3; в) $2a-7$. **388.** 39. **389.** 2) $\frac{2}{a+\sqrt{b}}$; 4) $-2\sqrt{b}$. **391.** 2) $-\frac{b}{a}$. **392.** 2) $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4}$; 4) $\frac{15+11\sqrt{3}}{6}$. **394.** 2) 1,46; 4) 3,7. **395.** 2) 0,173; 4) 0,105. **396.** 2) 8,4; 4) 12,7; 6) 51,2. **399.** 2) а) $2-5x$; б) x; в) $5x-2$. **400.** $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Глава IV. **403.** 2) $-x^2+9=0$; 4) $x^2=0$. **404.** 2) $x^2-4x-9=0$; 4) $5x^2+1=0$. **405.** 1) -3; 3; 2) -3; 2; 3) -2; 1; 4) 0; 1; 5) 2; 3; 6) -1; 3. **408.** 2) $x_{1,2}=\pm\frac{4}{7}$; 4) $x_{1,2}=\pm1,5$; 6) $x_{1,2}=\pm\sqrt{13}$. **409.** 2) $x_{1,2}=\pm11$; 4) $x=0$; 6) действительных корней нет. **410.** 2) $x_1=0$, $x_2=-2$; 4) $x_1=0$, $x_2=0,6$; 6) $x=-3$. **411.** 2) $x_{1,2}\approx\pm5,57$; 4) $x_{1,2}\approx\pm25,98$; 6) $x_{1,2}\approx\pm0,14$. **412.** 2) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$. **414.** 1) $b=4$, $x=-2$; 2) $b=6$, $x=3$; 3) $b=16$, $x=4$; 4) $b=\frac{1}{9}$, $x=-\frac{1}{3}$. **415.** 1) $x_1=-1$, $x_2=-3$; 2) $x_1=-1$, $x_2=-2$. **417.** 2) $x=0$; 4) $x_{1,2}=\pm3$; 6) $x_{1,2}=\pm3\sqrt{3}$; 8) $x_{1,2}=\pm20$. **418.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_1=0$, $x_2=0,04$; 6) корней нет. **419.** 2) $x_{1,2}=\pm1\frac{1}{4}$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$; 6) $x_{1,2}=\pm1\frac{1}{3}$. **420.** 2) $x_{1,2}=\pm2$; 4) $x_{1,2}=\pm1\frac{1}{3}$. **421.** 2) $x_1=0$, $x_2=4$; 4) $x_1=0$, $x_2=-2,5$. **422.** 2) $x_1=0$, $x_2=2\frac{3}{19}$. **423.** 2) $x_{1,2}=\pm8$; 4) $x_{1,2}=\pm2$. **424.** 0 и 2. **425.** ±2. **426.** 50,4 м. **427.** 1) $x=-3$; 2) $x=0$. **428.** 2) $m=9$; 4) $m=64$; 6) $m=6$. **429.** 2) $x_1=2$, $x_2=-6$; 4) $x_1=8$, $x_2=2$; 6) $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{23}$. **430.** 2) $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=-\frac{1}{5}$. **431.** 1) $x_1=1$, $x_2=4$; 2) $x_1=5$, $x_2=-2$. **432.** 1) $x_1=1$, $x_2=-2,5$; 2) $x_1=2$, $x_2=-\frac{3}{5}$. **433.** 2) 0,4; 4) 85. **434.** 2) $x_1=1$, $x_2=0,5$; 4) $x_1=3$,

$x_2=0{,}5$; 6) $x_1=2$, $x_2=\frac{3}{4}$. **435.** 2) $x_1=4$, $x_2=-0{,}5$; 4) $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$; 6) $\frac{-6\pm\sqrt{6}}{3}$; 8) $x_1=1$, $x_2=-\frac{4}{3}$. **436.** 2) $x=\frac{1}{4}$; 4) $x=-\frac{1}{6}$. **437.** 1), 2), 3), 4) действительных корней нет. **438.** 2) Два; 4) ни одного. **439.** 2) Действительных корней нет; 4) $x=2{,}5$; 6) $x_1=4$, $x_2=-1$. **440.** 2) $x_1=1$, $x_2=0{,}2$; 4) $x_1=7$, $x_2=-8$; 6) $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7}}{7}$. **441.** 2) $x_1=7$, $x_2=-11$; 4) $x_1=0{,}6$, $x_2=-3$. **442.** 2) $a>1\frac{1}{8}$. **443.** 2) $q=1$. **444.** 2) $x_1=0{,}5$, $x_2=-1{,}5$; 3) $x_1=5$, $x_2=\frac{1}{5}$. **445.** 2) $x_1=-3{,}1$, $x_2=-1{,}7$; 4) $x_1=-57$, $x_2=111$. **446.** $x=-m\pm\sqrt{m^2-c}$. 2) $x_1=-4$, $x_2=-6$; 4) $x_1=49$, $x_2=1$. **447.** 1) $x_1\approx-3{,}13$, $x_2\approx-1{,}25$; 2) $x_1\approx4{,}51$, $x_2\approx8{,}57$; 3) $x_1\approx-22{,}08$, $x_2\approx3{,}08$; 4) $x_1\approx-2{,}04$, $x_2\approx25{,}04$. **450.** 2) $x_1=7$, $x_2=-1$; 4) $x_1=4$, $x_2=-10$; 6) $x_1=2$, $x_2=-1$. **455.** 2) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-3x-18=0$. **456.** 2) $x_1=3$, $x_2=4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=-7$; 6) $x_1=3$, $x_2=-5$. **457.** 2) $(x-1)(x+5)$; 4) $(x+7)(x-6)$; 6) $(2x+1)(4x+3)$; 8) $(x+2)\times(1-4x)$. **458.** 2) $x+6$; 4) $\frac{1}{x+7}$; 6) $\frac{x+3}{3x+1}$. **459.** 2) $x_{1,2}=\sqrt{5}\pm2$; 4) $x_{1,2}=2(\sqrt{7}\pm\sqrt{6})$. **460.** 2) $x(x+7)(x-3)$; 4) $x(x-11)(x+2)$. **461.** 2) $\frac{x-9}{x+8}$; 4) $\frac{9-x}{x-5}$. **462.** 2) $-\frac{x}{(x+3)^2}$; 4) $\frac{x-1}{x(x+10)}$. **463.** $x^2-px+q=0$. **464.** $q=8$, $x_1=-2$, $x_2=-4$. **465.** $p=-4$, $x_1=1$, $x_2=3$ или $p=4$, $x_1=-1$, $x_2=-3$. **466.** 1) $-\frac{8}{15}$; 2) $17\frac{1}{9}$; 3) $-3\frac{19}{45}$; 4) $58\frac{26}{27}$. **467.** 1) $x_1\approx-2{,}414$, $x_2\approx0{,}414$; 2) $x_1\approx-0{,}732$, $x_2\approx2{,}732$; 3) $x_1=-6{,}3$, $x_2=4{,}5$; 4) $x_1=-18$, $x_2=57$. **468.** 2) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm2$; 4) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm7$. **469.** 2) $x_{1,2}=\pm1$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$. **470.** 2) $x_1=7$, $x_2=3\frac{1}{3}$; 4) $x_1=40$, $x_2=-20$; 6) $x_1=6$, $x_2=-\frac{2}{3}$. **471.** 2) $x_{1,2}=\pm10$; 4) корней нет; 6) $x=-3$. **472.** 2) Нет. **473.** 2) $x=0$. **474.** 1) $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=3$, $x_4=-1$; 2) $x_1=-4$, $x_2=-6$. **475.** 1) $x_{1,2}\approx\pm1{,}24$; 2) $x_{1,2}\approx\pm0{,}924$; 3) $x_{1,2}\approx\pm1{,}28$; 4) $x_{1,2}\approx\pm1{,}8$. **476.** 2) 14 и 15. **477.** 2) 19 и 21. **478.** 10 см, 40 см. **479.** 140 м, 175 м. **480.** 100 км/ч, 80 км/ч. **481.** 10 км/ч. **482.** 10 дней, 15 дней. **483.** Сторона квадрата равна 15 см. **484.** 9 см, 40 см. **485.** 18 км/ч, 15 км/ч. **486.** 30 дней, 20 дней. **487.** 18 км/ч. **488.** 60 км/ч. **489.** 10 дней, 15 дней. **490.** 8%. **491.** 4 кг, 6 кг. **492.** 2) (4; 1); 4) (0,5; 3). **493.** 2) (7; −5), (−4; 6); 4) (−1; −1), (7; 23). **494.** 2) (4; −3), (17; 10); 4) (4; 1), (−1; −4). **495.** 2) (1; 7), (7; 1); 4) (−2; −5), (−5; −2). **496.** 2) (4; −1); 4) (3; 1). **497.** 2) (2; 5), (5; 2), (−2; −5), (−5; −2); 4) (1; 5), (5; 1), (−1; −5), (−5; −1). **498.** 5 и 13. **499.** 4 и 36. **500.** 2) (7; −1), (−1; 7). **501.** 2) (4; 1), (−1; −4); 4) (2; 4), (4; 2); 6) (2; 2). **502.** 2) (1; 4), (−4; −1); 4) (1; 5), (5; 1), (−1; −5), (−5; −1). **503.** 2) (9; 4). **504.** 300 м, 200 м. **505.** 64. **506.** 1) (2; 3), (3; 2); 2) (3; 5), (5; 3). **507.** 20 км/ч, 12 км/ч. **508.** 2) (4; 5), (5; 4). **509.** 2) (3; 0), (1; −2). **510.** 2) (9; 4). **511.** 2) (4; 3), (−4; −3), (3; 4), (−3; −4). **512.** 2) (2; 5), (5; 2); 4) (1; 3), (19; −3). **513.** 2) (3; 5), (5; 3), (−3; −5), (−5; −3); 4) (7; 1), (−7; −1), (1; 7), (−1; −7). **514.** 2) (20; 4), (−20; −4); 4) (6; 3), (3; 6). **515.** 1) (3; 2), (−3; −2);

4) (5; 2), (–5; –2), (5; –2), (–5; 2). **516.** 2) (5; 1). **517.** 2) (5; 3); (–5; –3); (3; 5); (–3; –5); 4) (1; 3), (39; –187). **518.** 2) (9; 1), (1; 9); 4) (49; 36). **519.** 2) (1; 3; 4), (–1; –3; –4). **520.** 15 и 9, –9 и –15. **521.** 24 и 6, $19\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{2}$. **522.** 4 см и 3 см. **523.** 12 см и 15 см. **524.** 35 билетов по 140 р. и 20 билетов по 170 р. **525.** 30 дней и 20 дней. **526.** 9 ч и 6 ч. **527.** 80 лошадей, норма овса 15 кг, 25 лошадей, норма 4 кг. **528.** 21 ряд, 5 рядов. **529.** 2) $x_{1,2}=\pm 5\sqrt{2}$; 4) $x_1=0$, $x_2=7{,}5$. **530.** 2) $x_1=13$, $x_2=-4$; 4) $x_1=3{,}6$, $x_2=-7$. **531.** 2) $x_{1,2}==\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$; 4) $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$. **532.** 2) Два; 4) один. **533.** 2) $(x-8)(x-2)$; 4) $(x-2)(2x+1)$. **534.** 2) $x(x+2)$; 4) $\frac{5x+1}{x-3}$. **535.** 2) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. **536.** 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$; 4) $y=1$. **537.** 1 и 2. **538.** $\frac{5}{3}$ и $\frac{2}{3}$ или $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{5}{3}$. **539.** 12 м, 7 м. **540.** 15 см, 45 см. **541.** 20 км/ч. **542.** 15 км/ч. **543.** 3 дня, 5 дней. **544.** 12 и 8. **545.** 2) (1; 3), $\left(9; \frac{1}{3}\right)$; 4) (–3; –4), (–4; –3); 6) (5; 4); 8) (2; –1), (1; –2). **546.** 2) $x_1=0$, $x_2=-2$. **547.** 2) $x=0{,}5$; 4) $x_1=7$, $x_2=-13$. **548.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_{1,2}=\pm 4$. **549.** 2) $x_1=9$, $x_2=-12$; 4) $x_1=3$, $x_2=-6$. **550.** 2) Ни одного; 4) два. **551.** 2) $x=-4$; 4) $x=3$. **552.** 2) $x-4$. **553.** 2) $x_1=3$, $x_2=1{,}4$. **554.** За 36 дней. **555.** 1 ч 40 мин и 1 ч 20 мин или 2 ч и 1 ч 40 мин. **556.** 12 ч, 6 ч. **557.** 50 км/ч. **558.** 44 км/ч. **559.** 19 рядов или 4 ряда. **560.** 100 р. и 150 р. **561.** 1) (1; 0), $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (17; 10), (4; –3); 3) (–9; –4), $\left(2; \frac{10}{3}\right)$; 4) (–2; 5), $\left(-7\frac{1}{2}; 3\frac{5}{8}\right)$. **562.** 1) (3; 5), (–5; –3); 2) (3; 0), $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$; 3) (1; 2; 3), (–1; –2; –3), $\left(2; 1; \frac{3}{2}\right)$, $\left(-2; -1; -\frac{3}{2}\right)$; 4) (2; 5; 1), $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{13}{3}\right)$. **563.** 6 и 8. **564.** 60 км/ч, 40 км/ч. **565.** 2) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-4x-5=0$. **566.** $x_2=0{,}6$. **567.** 2) 91; 4) 7399. **568.** $a=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{19}$. **569.** $q=1$. **570.** $p=2$ или $p=-2$. **571.** 2) $x_1=9$, $x_2=-4$. **572.** 8 школьников. **573.** 22 шахматиста. **574.** 12 команд. **575.** 6 спортсменов. **576.** 7 человек. **577.** 2) 10; 4) 2,75.

Глава V. **579.** 2) $x_1=0$, $x_2=1$; 4) нет таких действительных значений x, при которых значение данной функции равно –5. **580.** 2) $x_1=1\frac{3}{4}$, $x_2=-1$; 4) $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{4}$. **581.** 2) –1; 0; 4) –0,2; 1. **582.** 2) Нулей нет; 4) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$; 6) нулей нет; 8) $x=1$. **583.** 2) $p=3$, $q=-4$; 4) $p=-2$, $q=-15$. **584.** $x_{1,2}=\pm 2$. **585.** 1) (0; 1), (–0,5; 0); 2) $\left(\frac{17}{3}; \frac{16}{9}\right)$, (3; 0); 3) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $(\sqrt{2}; 0)$; 4) $\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{9}+1\right)$, $(-\sqrt{3}; 0)$. **587.** B и C. **590.** 2) $(\sqrt{5}; 5)$, $(-\sqrt{5}; 5)$;

4) (0; 0), (2; 4). **591.** 2) Да. **592.** 2) Да; 4) нет. **594.** 1) $x<-3$, $x>3$; 2) $-5 \leqslant x \leqslant 5$; 3) $x \leqslant -4$, $x \geqslant 4$; 4) $-6<x<6$. **598.** 2) $a=\frac{1}{4}$; 4) $a=-\frac{1}{9}$. **599.** 2) $-3<x<3$; 4) $-4 \leqslant x \leqslant 4$. **600.** 2) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; 4) $-5<x<5$. **601.** 2) (–3; –4,5), (2; –2). **602.** $a=2$. **603.** $k=-13$; да, точка (0,6; –1,8). **604.** 2) Да; 4) нет. **605.** 1) Возрастающая; 2) убывающая; 3) возрастающая; 4) не является ни возрастающей, ни убывающей. **606.** 3 м/с². **609.** 2) (3; –16); 4) (3; 20). **610.** 2) (0; –5); 4) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$. **611.** 2) $x=-2$; 4) $x=2$; 6) $x=\frac{3}{4}$. **612.** 2) Нет; 4) нет. **613.** 2) (1; 0), (0,5; 0), (0; –1); 4) (0; 0), $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. **614.** $y=x^2-2x+3$. **616.** 2) $k=-10$. **618.** 1) $y=2(x-3)^2$; 2) $y=2x^2+4$; 3) $y=2(x+2)^2-1$; 4) $y=2(x-1{,}5)^2+3{,}5$. **620.** $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$. **621.** 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right)$; 4) $\left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$. **622.** 2) (1; 0), (–5; 0), (0; 10); 4) (0; 14). **626.** 7,5 + 7,5. **627.** 5 и 5. **628.** Сторона, параллельная стене, равна 6 м; другие стороны по 3 м. **629.** Нет. **630.** 1) При $x=1$ наименьшее значение $y=-5$; 3) при $x=1$ наименьшее значение $y=-2$. **631.** 1) $a>0$, $b>0$, $c>0$; 2) $a<0$, $b<0$, $c<0$. **633.** 1) Через 5 с наибольшая высота равна 130 м; 2) $(5+\sqrt{26})$ с. **634.** 2) $x_1=2$, $x_2=0{,}5$; 4) ни при каких действительных x. **635.** 2) (1; 1), (2; 4); 4) (–5; 18). **636.** 2) $x<-6$, $x>6$. **637.** 2) (5; 0), (–2; 0), (0; 10); 4) (1; 0), $\left(-\frac{11}{7}; 0\right)$, (0; –11). **638.** 2) (–1; 4); 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; 6) $\left(-\frac{1}{2}; -6\frac{1}{4}\right)$. **640.** 2) Наибольшее значение равно 4; 4) наименьшее значение равно $3\frac{2}{3}$. **641.** 150 м и 150 м. **642.** 200 м и 400 м. **643.** 2) $p=1$, $q=0$. **644.** 2) $p=-4$, $q=3$. **645.** 1) $x_1=1$, $x_2=-5$; 2) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. **646.** 1) $a=1$, $b=-2$, $c=0$; 2) $a=1$, $b=-2$, $c=4$; 3) $a=-2$, $b=8$, $c=-6$. **647.** $k_1=6$, $k_2=2$.

Глава VI. **650.** 2) $3x^2-x-1>0$; 4) $2x^2+x-5<0$. **652.** 2) $3<x<11$; 4) $x<-7$, $x>-1$. **653.** 2) $x<-3$, $x>3$; 4) $x<0$, $x>2$. **654.** 2) $-2<x<1$; 4) $x<-3$, $x>1$; 6) $x<-1$, $x>\frac{1}{3}$. **655.** 2) $x=\frac{1}{6}$; 4) $x<-4$, $x>2$. **658.** 7, 8, 9. **659.** Положительные значения на промежутках $x<-3$, $x>2$; отрицательные — на интервале $-3<x<2$. **660.** 2) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 4$; 4) $-1<x<4$. **661.** 2) $x<-\frac{1}{3}$, $x>2$; 4) $x \leqslant -0{,}25$, $x \geqslant 1$. **662.** 2) $x=7$; 4) решений нет; 6) x — любое действительное число. **663.** 2) Решений нет; 4) решений нет; 6) x — любое действительное число. **664.** 3) $x<-2$, $x>0$; 4) $x<-\sqrt{7}$, $x>\sqrt{7}$; 6) $x<-5$, $x>3$; 8) $-2<x<-1$. **667.** 2) $x<-\frac{5}{3}$, $x>\frac{5}{3}$; 4) $-1<x<4$; 6) x — любое действительное число; 8) $x=-3$. **668.** 2) x — любое действительное число; 4) $x \neq \frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$. **669.** 2) Решений нет; 4) $-0{,}5<x<3$; 6) x — любое действительное число. **670.** 2) $x=1$; 4) x — любое действительное число. **672.** $-6<$

$<r<2$. **673.** $r<-3$, $r\geqslant 1$. **675.** 2) $-5<x<8$; 4) $x<-5$, $x>3\frac{1}{2}$. **676.** 2) $x<0$, $x>9$; 4) $-3<x<0$; 6) $x<-1$, $x>3$. **677.** 2) $-\frac{1}{2}<x<0$, $x>\frac{1}{2}$; 4) $-2<x<2$, $x>5$. **678.** 2) $-7<x<7$; 4) $-4<x<4$, $x>4$; 6) $x=-2$, $2\leqslant x\leqslant 5$. **679.** 2) $-3<x<4$; 4) $-3{,}5\leqslant x<7$. **680.** 2) $-2\leqslant x<-1$, $x\geqslant 3$. **681.** 2) $x<0{,}5$, $x>1$; 4) $x<-\frac{2}{3}$, $0<x<\frac{1}{2}$, $x>\frac{2}{3}$. **682.** 2) $-4<x<-2$, $x>3$. **683.** 2) $-3\leqslant x\leqslant -1$; $4\leqslant x\leqslant 5$. **684.** 2) $x<-2$, $2<x<6$. **685.** 2) $x<-3$, $-1\leqslant x<2$, $x\geqslant 4$. **686.** 2) $-\sqrt{15}<x<-3$, $0<x<\sqrt{15}$; 3) $-8<x<-1$; 4) $x<-5$, $x>2$; 5) $-1<x\leqslant -\frac{2}{5}$; 6) $x<-4$, $-4<x<\frac{3}{2}$, $x>4$. **687.** 2) $x<3$, $x>4$; 4) $x<3$, $x>4$; 6) $x<-6$, $x>6$; 8) $-\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant \frac{3}{4}$. **688.** 2) $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$; 4) $x\leqslant 0$, $x\geqslant \frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{2}<x<4$; 8) $-2<x<\frac{1}{2}$. **689.** 2) $x<\frac{4}{5}$, $x>1$; 4) $x\neq -5$; 6) $x\neq -\frac{3}{2}$. **690.** 2) Решений нет; 4) решений нет; 6) решений нет. **691.** 2) $x<-4$, $-1<x<1$; 4) $x<-\frac{1}{2}$, $4<x\leqslant 7$; 6) $x<-\frac{1}{2}$, $2<x<3$. **692.** 2) $-1<x<5$; 4) $-5\leqslant x\leqslant 2$; 6) $x\leqslant -\frac{3}{2}$, $x\geqslant \frac{1}{3}$. **693.** 2) x — любое действительное число; 4) решений нет; 6) $\frac{1}{2}<x<1$; 8) x — любое действительное число. **694.** 2) $x\leqslant \frac{1}{2}$, $x\geqslant 3$; 4) $x=\frac{2}{3}$; 6) решений нет. **695.** 2) $x<-\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}<x<\sqrt{3}$; 3) $x<-4$, $-1<x<1$, $x>1$. **696.** 2) $-2<x<-1$, $\frac{1}{5}<x<\frac{3}{5}$; 3) $-\frac{1}{3}<x\leqslant -\frac{1}{5}$, $1<x\leqslant 2$. **697.** Не меньше 12 км/ч. **699.** 1) $x\leqslant -3$, $-2<x<1$, $x\geqslant 3$; 2) $-3<x<-2$, $-1\leqslant x\leqslant 1$; 3) $x<-2$, $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$, $x>2$. **700.** 0; 1; 2; 3 или -1; 0; 1; 2.

Упражнения для повторения курса алгебры VIII класса. **701.** 2) $\frac{22}{35}$; 4) $-\frac{5}{6}$; 6) 3,485; 8) 4,5. **702.** 2) $x_1=3$, $x_2=-4$; 4) $x_1=0$, $x_2=-1\frac{2}{3}$; 6) $x_{1,2}=\pm\frac{2}{3}$; 8) $x=-\frac{1}{3}$. **706.** 2) $y\geqslant -2$; 4) $x>-4$; 6) $x\leqslant 11\frac{1}{3}$. **707.** 2) -5; -4; -3; -2; -1; 0; 4) 4. **708.** 2) (2; 1); 4) ($-13{,}5$; $-27{,}5$); 6) (6; 6); 8) (1; 2). **709.** 2) $\frac{2}{9}<x\leqslant 10$; 4) $x>7{,}2$. **710.** 2) -15; -14; ...; -1; 0. **711.** 2) $x_1=8{,}1$, $x_2=-2{,}1$; 4) $x_1=4$, $x_2=-3$; 6) $x_1=0$, $x_2=\frac{6}{7}$. **712.** 2) $x\leqslant -3{,}4$, $x\geqslant 7{,}4$; 4) $x\leqslant -2\frac{1}{3}$, $x\geqslant 1$; 6) $x\leqslant -\frac{1}{15}$, $x\geqslant \frac{29}{15}$. **713.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{1375}$. **715.** $\approx 0{,}1\%$. **716.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{52}{99}$; 6) $2\frac{17}{45}$. **717.** 2) $3{,}1<\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{7{,}3}>2{,}7$. **718.** 2) $a=-11$; 4) $a=\frac{4}{7}$. **719.** 2) -44. **720.** 2) $(\sqrt{15}-b)(\sqrt{15}+b)$; 4) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{41}}-x\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{41}}+x\right)$. **721.** 2) $\frac{1}{5}$; 4) 21; 6) 200. **722.** 25 см^2. **723.** В 1,6 раза. **724.** 2) $-3xy^2\sqrt{5xy}$.

725. 2) $-4{,}2\sqrt{2}$. **726.** 2) 8. **727.** 2) $15\sqrt{2}-\sqrt{5}$; 4) $2x\sqrt{x}$. **728.** 2) $3-a^2$; 4) $-ab$. **729.** 2) $x=5\frac{3}{4}$; 4) $x=-1$; 6) $x=3\frac{1}{4}$. **730.** 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{11}$; 4) $x_1=0$, $x_2=-5$; 6) $x_1=0$, $x_2=12$. **731.** 2) $y_1=0$, $y_2=9$; 4) $x_1=0$, $x_2=9$; 6) $x_{1,2}=\pm1{,}5$. **732.** $\frac{2}{15}$ см, $2\frac{2}{15}$ см. **733.** 8 см, 32 см. **734.** 2) $x_1=-4$, $x_2=0{,}5$; 4) $x_1=0{,}5$, $x_2=-2$; 6) нет корней. **735.** 2) $x_1=10$, $x_2=-2$; 4) $x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}$; 6) $x_{1,2}=6\pm\sqrt{29}$. **736.** 2) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{2}{15}$; 3) $x_{1,2}=\pm5$. **737.** 6) $x_1=8$, $x_2=-3$; 8) $x_1=7$, $x_2=-11$. **738.** $p=5$, $q=-150$. **739.** 2) $x^2-bx+c=0$. **740.** 2) $x_{1,2}=\pm3$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$; 4) $x_{1,2}=\pm3$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$. **741.** 2) $x_{1,2}=\pm2$; 4) нет корней. **742.** 2) $x=-\frac{1}{3}$; 4) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-4$; 6) $x=\frac{1}{2}$. **743.** 2) $x=-2$; 4) нет корней. **744.** 2) $(x-9)\times\times(x+4)$; 4) $(x+1)(2x-5)$; 6) $2(x+3)(1-2x)$; 8) $\frac{1}{5}(x-5)(x+10)$. **745.** 2) $\frac{1}{a-9}$; 4) $\frac{a-3}{2(a-2)}$; 6) $\frac{3-a}{a-2}$. **746.** 1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2-1)$; 2) $(m+n)(mn-1)$; 3) $m^2(m-1)(m^2+1)$; 4) $x(x-1)(x^2+1)$; 5) $(4x-y)(4x+3y)$; 6) $(a-1)(a+1)\times\times(a-2)(a+2)$; 7) $(b-2)(b+2)(b-3)(b+3)$; 8) $3(x+m)(x-3m)$. **747.** 340 кг, 40 кг, 20 кг. **748.** 96 км. **749.** 16 пресс-форм. **750.** 18 т с га, 20 т с га. **751.** $\frac{15}{4}$. **752.** 30 дней, 20 дней. **753.** 15 ч, 12 ч. **754.** 27 км/ч. **755.** 2) (1; 0); 4) $\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$. **756.** 2) (2; 0), (0; –5). **757.** 2) $x=0$, $x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{4}{3}$. **758.** 2) (–4; –4), (–2; 0), (–6; 0), (0; 12); 4) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, (0; 0), (1; 0); 6) (–3; –1), (–2; 0), (–4; 0), (0; 8); 8) $\left(-\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, (–1; 0), (–1,5; 0), (0; 3). **763.** 2) $-15<x<-4$; 4) $x\leqslant12$; $x\geqslant13$. **764.** 2) $0<x<\sqrt{5}$; 4) $x<-\sqrt{3}$, $x>\sqrt{3}$. **765.** 2) $-9<x<6$; 4) $-2<x<0{,}1$; 6) $x\leqslant\frac{1}{8}$, $x\geqslant2$. **766.** 2) $x=-12$; 4) x — любое действительное число; 6) решений нет. **767.** 2) x — любое действительное число; 4) x — любое действительное число; 6) x — любое действительное число. **768.** 2) $-0{,}7<x<\frac{1}{2}$; 4) $-2\leqslant x\leqslant1$. **769.** 2) $x\leqslant-2$, $x=1$; 4) $x\leqslant-\frac{1}{3}$, $0\leqslant x\leqslant2$. **770.** 2) $-0{,}5\leqslant x<2$; 4) $-3<x<0$, $x>1$. **771.** От леса до дома. **772.** На первом руднике. **773.** Десятиклассник. **777.** 2) Меньше 400 км. **778.** Не более 400 Дж. **781.** 2) Решений нет; 4) $1<x<4$; 6) $x>4\frac{1}{12}$. **782.** Больше 2 см, но меньше 3 см. **783.** Не меньше 4 м/ч, но меньше 5 м/ч. **784.** Между 18 и 19 часами. **785.** 2) $x<\frac{1}{3}$, $x>3$. **786.** 2) $-4{,}6ab^2\sqrt{ab}$. **787.** 2) 42; 4) 3. **788.** 2) $2\sqrt{a-1}$; 4) $-\sqrt{3}$. **789.** 2) $\frac{b-c}{4(b+c)}$; 4) $\frac{a}{b}$. **791.** $k>\frac{9}{16}$. **792.** $k_1=3$, $k_2=-1$. **793.** 2) $x_1=1{,}2$, $x_2=-2$; 4) $x=3$; 6) $x=2$. **794.** 2) $y+4$. **795.** 6 км. **796.** 15 км/ч. **797.** 120 км. **798.** 3 км/ч, 20 км/ч. **799.** 120 р., 20 р. **800.** 12 вагонов, 190 т. **801.** 5 листов. **802.** 30 г, 24 г. **803.** 16 или 48 обезьян. **804.** 2) $2\frac{5}{9} \leqslant x \leqslant 7$; 4) $x < -1\frac{2}{65}$, $x > -1$. **805.** Высота больше 3,1 см, средняя линия больше 6,2 см. **806.** Больше 8 с. **807.** Больше 5 см. **808.** 2) $x < -7$, $-1 < x < 2$; 4) $-1 \leqslant x < -\frac{1}{3}$, $x > \frac{1}{3}$. **809.** $p = 5$, $q = -14$. **810.** 2) $p = 14$, $q = 49$. **811.** $y = -2x^2 + 11x - 5$. **812.** $y = \frac{h}{r^2}x^2$. **813.** 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$. **815.** Указания. 1) Обозначая $\frac{a}{b} = A^3$, $\frac{b}{c} = B^3$, $\frac{c}{a} = C^3$ и учитывая равенство $ABC = 1$, записать данное неравенство в виде $A^3 + B^3 + C^3 \geqslant 3ABC$, которое преобразовать к виду $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \geqslant 0$. Неравенство $A^2 + B^2 + C^2 \geqslant AB + AC + BC$ получается сложением неравенств $A^2 + B^2 \geqslant 2AB$, $A^2 + C^2 \geqslant 2AC$, $B^2 + C^2 \geqslant 2BC$; 2) сложить неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического: $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geqslant 2c$, $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant 2a$, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geqslant 2b$; 3) вычесть из левой части неравенства правую и числитель полученной дроби записать в виде $(a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (a + c)(a - c)^2$; 4) см. указание к **815(3)**. **817.** 1) $x_{1,2} = \pm 2$; 2) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 3$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; 4) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 5) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$; 6) $x_{1,2} = \pm 4$, $x_{3,4} = \pm 6$. **819.** $r_{1,2} = \pm 1$. **820.** $x^2 - 343x + 81 = 0$. **821.** 1) $\frac{7}{8}$; 2) $-5\frac{1}{16}$; 3) 339,5; 4) $378\frac{1}{16}$. **822.** $r_1 = 2$, $r_2 = -8$. **824.** -3. **825.** -8. **826.** $a = -3$, $b = 6$, $c = 0$. **827.** Через 0,6 с. **828.** 1) $(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3})(a^2 + 1)$; 2) $(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)$. **829.** 1) $\frac{a + 3b}{a + b}$; 2) $\frac{a + 3b}{2a + 3b}$; 3) $\frac{4a^2 - 6ab + 9b^2}{a - b}$. **830.** 21 м/с, 147 м. **831.** 56 с. **832.** 14 мин, 18 мин 40 с. **833.** 6 с. **834.** 1 ч. **835.** 5 ч, 7,5 ч. **836.** 1) 84,4; 2) 13,4; 3) 43,8; 4) 80,2. **837.** 1) 959,72; 2) 22,02; 3) 6,13; 4) 4,4. **838.** 1) 43,37; 2) 71,79. **839.** 1) 4,9; 2) 2,9; 3) 59,9; 4) 63,3. **840.** 1) 2,1; 2) 5,3; 3) 2,0; 4) 3,5. **841.** 1) 90,4; 2) 29,8; 3) $-32{,}5$; 4) 165,7. **842.** 1) 1,1; 2) 0,8. **843.** 1) $x_1 = -61$, $x_2 = 123$; 2) $x_1 \approx -143$, $x_2 \approx -38$; 3) $x_1 = 6{,}3$, $x_2 = 3{,}4$; 4) $x_1 \approx -8{,}7$; $x_2 \approx 7{,}2$. **844.** 1) $x_{1,2} = \pm 2{,}3$, $x_{3,4} = \pm 3{,}1$; 2) $x_{1,2} = \pm 1{,}5$, $x_{3,4} = \pm 2{,}4$. **845.** Доказать, что $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$. **847.** $n = 2$. **848.** $100 = 80 + 20$, $100 = 40 + 60$. **849.** Указание. Возвести обе части равенства в квадрат. **850.** $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2}{5}$. **851.** $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$. **852.** 40 яиц и 60 яиц. **853.** 60 или 40 пистолей. **855.** 18. **858.** 9. **859.** 24. **865.** 10 989. **874.** 3. **877.** $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 2$. **879.** 3 926 341. **885.** 1) $\frac{8}{1 - x^8}$; 2) 0; 3) 2; 4) $\frac{1}{n}$. **886.** 1) $x_1 = 2$, $x_2 = -1 - \sqrt{5}$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$; 3) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 6$; 4) x — любое число, такое, что $2 \leqslant |x| \leqslant 3$; 5) $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$, $x_4 = 1$;

6) $x_1=-6$, $x_2=-3-\sqrt{8}$, $x_3=-3+\sqrt{8}$, $x_4=0$; 7) $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=1$, $x_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 8) $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **887.** 1) (2; 3), (−2; −3); 2) (3; 4), (4; 3); 3) (2; 3), (3; 2); 4) (−4; −3), (−4; 2), (3; −3), (3; 2); 5) (1; 2), (2; 1); 6) (0; 0), (6; 3), (3; 6), (−2; 1), (1; −2); 7) (−3; −5), (3; 5), $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{13}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}\right)$; 8) (−4; −5), (4; 5), $(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$. **888.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (4; 3), (3; 4); 3) (0; 2), (0; −2), (1; −3), (−1; 3); 4) (2; −1), (−1; 2); 5) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$; 6) (0; 0), $(\sqrt{7}; \sqrt{7})$, $(-\sqrt{7}; -\sqrt{7})$, $(\sqrt{19}; -\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19}; \sqrt{19})$, (2; 3), (−2; −3); (3; 2), (−3; −2); 7) (2; 1), (−1; −2); 8) (−4; −2), (4; 2). **889.** 1) $r_1=6$, $r_2=2$; 2) $r=0$. **894.** $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. **895.** $-0{,}5<r<0$. **896.** $r\geqslant 1$. **898.** $a=-2$. **900.** $r<0$, $4\leqslant r\leqslant 4{,}5$. **902.** $r<-\frac{2}{3}$, $r\geqslant 3+2\sqrt{2}$. **904.** 1) $c>0$; 2) $c<0$. **908.** $-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}<a<0$, $a>1$. **909.** $a<-4$, $-\frac{5}{4}<a<0$. **910.** 1) $(x+2)(x-3)\times$ $\times(x-5)$; 2) $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$; 3) $(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$; 4) $(x+2)(x+4)\times$ $\times(x^2+5x+8)$. **911.** $(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$. **912.** 1) $(x-1)(x^2+1)$; 2) $\frac{x+2}{x+1}$; 3) $x+1$; 4) $\frac{x+3}{2x+1}$; 5) $\frac{x+2}{x-2}$. **914.** 1) $x<-\frac{\sqrt{7}}{2}$, $-1<x<\frac{\sqrt{7}}{2}$, $x>\frac{4}{3}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{4}{7}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}<x<1$; 4) $x<-3$, $1<x<3$; 6) $0<x<3$; 8) $x\leqslant\frac{3}{2}$.

Практические и прикладные задачи

Глава I. **1.** Примерно 50 суток. **2.** 1) $40\leqslant F\leqslant 77$; 2) $-15\leqslant C\leqslant 0$. **3.** 25 часов. **4.** $20\leqslant F_{упр}\leqslant 50$. **5.** 1) $1\leqslant E\leqslant 6$; 2) $54<E<128$. **6.** 1) Не успеет; 2) успеет. **7.** Можно. **8.** 8 или более задач. Глава II. **1.** $C\approx 12{,}9$. **2.** $h\approx 9{,}4$ м. **3.** $v\approx 1700$ км/с. **4.** $T\approx 25$ ч. **5.** 1) $P\approx 2424$ Вт; 2) $P\approx 0{,}5$ Вт; 3) $P\approx 3200$ Вт. **6.** 1) 14,75 м $\leqslant L\leqslant$ 15,25 м; 2) 840 Вт $\leqslant P\leqslant$ 860 Вт. **7.** 1) $0{,}1\cdot 10^{-7}$ мм; 2) $0{,}01\times$ $\times 10^7$ км². **8.** $\approx 9{,}46\cdot 10^{12}$ км. **9.** $S\approx 2{,}2\cdot 10^{15}$ км. **10.** 0,1 °C. **11.** 1) 0,01 с; 2) 0,01 суток; 3) 0,1 °C; 4) 0,1 °C; 5) 1 м; 6) $1\cdot 10^7$ человек; 7) $1\cdot 10^3$ км²; 8) $1\cdot 10^3$ км². **12.** [309,7; 342,3]. **13.** 1) 18,8 м² $\leqslant S\leqslant$ 19,2 м²; 2) 1672 см $\leqslant$ $\leqslant P\leqslant$ 1689 см. Глава III. **1.** а) 138 Н/мм²; б) 76 Н/мм². **2.** 102,9 км. **3.** а) 134 с; б) 316 с. **4.** а) Совпадают; б) совпадают. **5.** $l=\frac{T^2g}{4\pi^2}$, а) $l\approx 0{,}30$ м; б) $l\approx 1{,}2$ м. **6.** а) $R=\sqrt{\frac{3V}{\pi H}}$; б) $R=\sqrt{\frac{3V}{2\pi h}}$. **7.** $V\approx 7{,}9$ км/с. **8.** 1) Увеличится примерно на 15%; 2) увеличится примерно на 6%. Глава IV. **1.** 5 ч и 7 ч. **2.** 20%. **3.** 24 см. **4.** $t\approx 1{,}6$ с. **5.** $t_1\approx 0{,}4$ с, $t_2\approx 2$ с. **6.** 30 л. **7.** а) 69,5 см; б) 39,6 см. Глава V. **2.** 5 м, 10 м. **3.** $y=-\frac{1}{72}x^2+\frac{2}{3}x$. **4.** $S=\pi(9-x^2)$. **6.** 10. **7.** 12. Глава VI. **1.** После 2-й секунды полёта. **2.** 1) Не более 30 лет; 2) не более 50 лет; 3) может, если $t\geqslant 95$ лет; 4) не может.

Задания «Проверь себя!»

Глава I. 2. а) $x<2{,}4$; б) $x\geqslant -15$; в) $x<5$. 3. а) $4\frac{1}{3}<x<6\frac{1}{4}$; б) $x\geqslant 3$; в) $x<-5$. 6. а) $x<2\frac{2}{3}$; б) $x\geqslant 13$. 7. а) $x\leqslant -4{,}5$; б) $-6{,}6<x\leqslant 3{,}5$. 8. а) $-6<$ $<x<10$; б) $x\leqslant -\frac{3}{2}$, $x\geqslant 1$. 11. При $x<6{,}5$. 12. $10\leqslant x\leqslant 30$. 13. $\frac{2}{7}<x<4$.

Глава II. 1. 0,(4). 2. $4{,}4301\cdot 10^{1}$; $4{,}83\cdot 10^{-1}$; $-2{,}5\cdot 10^{-1}$. 3. $\approx 2664{,}89$. 4. $\approx 0{,}429$. 5. $7{,}458\cdot 10^{4}$; $2{,}6\cdot 10^{-3}$; 3,056. 7. $\approx 2{,}3$. 8. $\approx 3{,}3$. 9. $\approx 0{,}909$. 10. $5{,}63\cdot 10^{-4}$, 8,0208. 11. $\approx 8{,}5$. 12. 1) $\approx 73{,}2$; 2) $\approx 0{,}0761$. 13. $\approx 7{,}28$.

Глава III. 1. $7>\sqrt{48}$; $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$; 2. 63; 6; 5; $\frac{3}{2}$; 17; 27. 3. $-2\sqrt{2}$; $7-2\sqrt{10}$; 1. 4. $2a\sqrt{2a}$. 5. $x-\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. 6. $\frac{5\sqrt{7}}{7}$; $2-\sqrt{3}$. 7. а) $4{,}6<\sqrt{22}$; б) $2\sqrt{37}<5\sqrt{6}$; 8. б) -10; в) $-\sqrt{3}$; г) -2. 9. $\sqrt{x^3y}$. 10. $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. 11. $3+2\sqrt{2}$. 12. 5. 13. $40|xy|$. 14. б) $\frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$. 15. а) $\sqrt{x+2}+3$; б) $\sqrt{2}-1$. 16. $x\leqslant 2\frac{2}{3}$.

Глава IV. 1. а) $x=0$; б) $x_1=-1$, $x_2=2$; в) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$; г) $x_1=0$, $x_2=1\frac{2}{3}$; д) $x_{1,2}=\frac{1}{2}$; е) $x_1=17$, $x_2=-1$; ж) $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{3}$; з) нет корней. 2. 1) $(x-2)(x+$ $+3)$; 2) $(x+1)(2x-3)$. 3. 9 км/ч; 12 км/ч. 4. (8,5; 0,5). 5. $x=-15$. 6. $-11x$. 7. 12 км/ч, 16 км/ч. 8. а) (6; 9), (−9; −6). 9. $a=1$. 10. $qx^2+p(q+1)x+$ $+(q+1)^2=0$. 11. $x=-1$. 12. 25. 13. $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$.

Глава V. 1. -4. 2. $x_1=0$, $x_2=2$. 3. $y>0$ при $-1<x<1$; $y<0$ при $x<-1$; $x>1$. 4. $x>0$; $x<0$. 5. (3; 0). 6. $x_0=-2{,}5$, $y=-6$. 7. Функция убывает при $x\leqslant -\frac{1}{2}$, возрастает при $x\geqslant -\frac{1}{2}$ (рис. 76). 8. $y=6\frac{1}{8}$. 9. Рис. 77. 10. $y=-x^2+4x$. 11. $a>0$, $b<0$, $c<0$. 12. а) Рис. 78; б) рис. 79.

Глава VI. 1. а) $-0{,}2\leqslant x\leqslant 0{,}2$; б) $x<-30$, $x>30$; в) $-1<x<4$; г) x — любое действительное число; д) нет решений; е) $x=-10$. 2. $x\geqslant 1$, $-2\leqslant x\leqslant 0$. 3. а) $x\leqslant\frac{1}{8}$, $x>5$; б) $x\leqslant 1$, $x\geqslant 3{,}2$; в) $0{,}4\leqslant x\leqslant 2$; г) нет решений. 4. $-6<$ $<x\leqslant -3$, $0<x\leqslant 5$. 5. а) $4\leqslant x\leqslant 10$; б) $x\leqslant -9$, $x\geqslant -1$. 6. $-4\frac{2}{7}\leqslant x<-3$, $x>2\frac{1}{2}$. 7. $q>4$. 8. $-3\leqslant x<-1$, $-1<x\leqslant 5$. 9. Если $a=1$, то $x<1$, $x>1$; если $a\neq 1$, то x — любое действительное число.

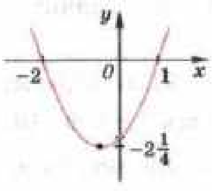


Рис. 76

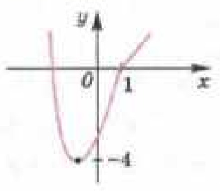


Рис. 77

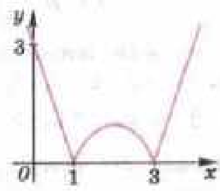


Рис. 78

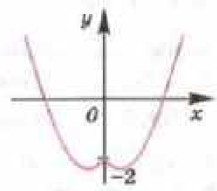


Рис. 79

856. Воспользоваться равенством $111 = 3 \cdot 37$, откуда $333 = 9 \cdot 37$ и $555 = 15 \cdot 37$. **857.** Число 11^{11} оканчивается цифрой 1. Число 12^{12} оканчивается цифрой 6, так как число 12^4 оканчивается цифрой 6 (проверить умножением), $12^{12} = (12^4)^3$; а произведение чисел, оканчивающихся цифрой 6, также оканчивается цифрой 6. Число 13^{13} оканчивается цифрой 3, так как число 13^4 оканчивается цифрой 1 (проверить умножением), поэтому число $13^{12} = (13^4)^3$ также оканчивается цифрой 1, а число $13^{13} = 13^{12} \times 13$ — цифрой 3. Данное число оканчивается нулём, так как $1 + 6 + 3 = 10$. **858.** Данное число оканчивается цифрой 4, так как $1982^{1982} = (1982^4)^{495} \times 1982^2$ и в этом произведении первое число оканчивается цифрой 6 (см. указание к задаче 857), а второе — цифрой 4. **859.** Произведение двух натуральных чисел оканчивается нулём только в двух случаях: 1) когда хотя бы одно из этих чисел оканчивается нулём; 2) одно из этих чисел оканчивается цифрой 5, а другое — чётное число. Выяснить, сколькими нулями оканчивается произведение чисел от 1 до 10, затем от 11 до 20 и т. д., обратив особое внимание на произведение от 41 до 50 и от 91 до 100. **860.** Известно, что при делении степени числа 10 с любым натуральным показателем на 9 остаток равен 1. Поэтому при делении числа $10^{25} + 10^{17}$ на 9 остаток равен 2. **861.** При решении таких задач полезно использовать следующее свойство делимости чисел: если натуральные числа n и m делятся на натуральное число k, то числа $n + m$ и $n - m$ (при $n > m$) также делятся на число k. Произведение $(n-1) \times n(n+1) = n^3 - n$, где натуральное число $n \geqslant 2$, трёх последовательных натуральных чисел делится на 6, так как одно из них делится на 3 и хотя бы одно из них является чётным. Вычтем из данного числа $n^3 + 11$ и число $n^3 - n$ (с целью уничтожения n^3) и прибавим это же число $n^3 + 11n - (n^3 - n) + (n^3 - n) = 12n + (n^3 - n)$. Так как $12n$ делится на 6 и $n^3 - n$ делится на 6, то их сумма, т. е. данное число, также делится на 6. **862.** См. указание к задаче 861. **863.** Из разложения данного числа на множители $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ следует, что это число делится на 6 (см. указание к задаче 861). Если ни одно из чисел $n-1$, n, $n+1$ не делится на 5, то $n = 5m + 2$ или $n = 5m + 3$, где m — целое число. Показать, что в обоих этих случаях число $n^2 + 1$ делится на 5. **864.** Показать, что $n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. **865.** Запишем искомое пятизначное число x в виде суммы разрядных слагаемых $x = 10\,000a + 1000b + 100c + 10d + t$, где a, b, c, d, t — цифры, причём $a \neq 0$. По условию задачи второе число $y = 9x = 10\,000t + 1000d + 100c + 10b + a$. Заметим, что если $a > 1$, то число $9x$ шестизначное. Следовательно, $a = 1$, поэтому $t = 9$ и равенство $y = 9x$ таково: $90\,000 + 9000b + 900c + 90d + 81 = 90\,000 + 1000d + 100c + 10b + 1$, откуда $899b + 80c + 8 = 91d$. Из этого равенства следует, что $b = 0$, так как при $b \geqslant 1$ левая часть равенства больше 899, а правая часть меньше или равна $91 \cdot 9 = 819$. Из равенства $80c + 8 = 91d$ следует, что $d \neq 0$ и d делится на 8, т. е. $d=8$, и поэтому $c=9$. **866.** Если первое трёхзначное число $x=100a+10b+c$, где a, b, c — цифры и $a \neq 0$, то второе число $y=100c+10b+a$ и $c \neq 0$. Разность $x-y=99(a-c)$. Предположим, что $99(a-c)=n^2$, где n — натуральное число. Тогда n делится на 3, т. е. $n=3k$, и поэтому $11(a-c)=k^2$. Из этого равенства должно следовать, что k делится на 11, но тогда разность $a-c$ должна делиться на 11, а этого не может быть, так как a и c — цифры. **867.** Воспользоваться равенством $35x+65y=6(3x+8y)+17(x+y)$. **868.** Показать, что сумма квадратов двух нечётных чисел является чётным числом, не делящимся на 4, и что такое число не может быть квадратом натурального числа. **869.** Сумму S квадратов пяти последовательных натуральных чисел можно записать так: $S=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5 \times \times (n^2+2)$, где натуральное число $n \geqslant 3$. Если предположить, что $5(n^2+2)=k^2$, где k — натуральное число, то число k должно делиться на 5, и поэтому число n^2+2 также должно делиться на 5. Однако покажем, что число n^2+2 не делится на 5 ни при каком натуральном n. При делении натурального числа n на число 5 остаток r может быть равен одному из чисел 0, 1, 2, 3, 4, т. е. $n=5k+r$, где k — неотрицательное целое число. Тогда $n^2+2=5(5k^2+2kr)+r^2+2$. Для того чтобы это число делилось на 5, нужно, чтобы число r^2+2 делилось на 5. Однако при r, равном 0, 1, 2, 3, 4, значения r^2+2 равны соответственно 2, 3, 6, 11, 18. **870.** Данное число $a=n^2+5n+16$ можно записать так: $a=(n-4)^2+13n$. Если это число делится на $169=13 \cdot 13$, то число $(n-4)^2$ и число $n-4$ делятся на 13, т. е. $n=4+13k$, где k — неотрицательное целое число. Но тогда $a=169k^2+ +13(4+13k)=169(k^2+k)+13 \cdot 4$, а это число не делится на 169. **871.** Нужно доказать, что если хотя бы одно из натуральных чисел n, m не делится на 3, то и число n^2+m^2 не делится на 3. Пусть число n не делится на 3, т. е. или $n=3k+1$, или $n=3k+2$, где k — неотрицательное целое число. Тогда или $n^2=3(3k^2+2k)+1$, или $n^2=3(3k^2+4k+1)+1$. В обоих случаях при делении числа n^2 на 3 остаток равен 1. Поэтому при делении числа n^2+m^2 на 3 остаток равен 1, если число m делится на 3, или остаток равен 2, если число m не делится на 3, т. е. число n^2+m^2 не делится на 3. **872.** Показать, что если $n=7m+r$, где m — неотрицательное целое число, а r — остаток от деления числа n на 7, то $n^3-3=7k+r^3-3$, где k — целое неотрицательное число. Осталось проверить, что при каждом значении r, равном 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, число r^3-3 не делится на 7. **873.** Так как p — простое число, то оно нечётное: $p=2k+1$, где k — натуральное число, $k \geqslant 2$. Поэтому число $p^2-1=4k(k+1)$ делится на 8. Так как число p не делится на 3, то $p=3m+1$ или $p=3m+2$, где m — натуральное число. В первом случае число $p^2-1=3(3m^2+2m)$ делится на 3, во втором случае число $p^2-1=3(9m^2++4m+1)$ также делится на 3. **874.** При $n=3$ значение $n^2+8=17$ — простое число. Если $n>3$, n — простое число, то число n^2+8 не является простым, так как $n^2+8=(n^2-1)+9$ делится на 3 (см. указание к задаче 873). **875.** Так же как и в задаче 873, показать, что при делении p^2 на 4 и на 3 остаток равен 1. Пусть r — остаток от деления числа p^2 на 12, т. е. $p^2 = 12n + r$, где n — натуральное число, а r — целое число, $0 \leqslant r \leqslant 11$. Так как 12 делится на 4 и на 3, то при делении числа $12n + r$ на 4 получается такой же остаток, какой и при делении числа r на 4. Аналогично при делении числа $12n + r$ на 3 получается такой же остаток, какой и при делении числа r на 3. Итак, при делении числа r на 4 и на 3 остаток равен 1. Проверкой показать, что среди чисел r, равных 0, 1, 2, ..., 11, только $r = 1$ удовлетворяет этому условию. **876.** Воспользоваться равенством $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n)$. **877.** Записать уравнение в виде $(x - 1)(y - 1) = 1$. **878.** 1)—3) Избавиться от иррациональностей в знаменателях с помощью формул $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$, $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. 4) Воспользоваться равенством $\frac{1}{(a + n)(a + n + 1)} = \frac{1}{a + n} - \frac{1}{a + n + 1}$. 5) Выражения левой и правой частей равенства представить в виде многочленов стандартного вида и сравнить их. **879.** Воспользоваться равенством задачи 878(5). **881.** Преобразовать исходное равенство к виду $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$. **882.** Показать, что данное выражение равно $(a - b)(b - c)(c - a)$. **883.** Преобразовать исходное равенство к виду $ab(a - b) + c(a^2 - b^2) = abc(a^2 - b^2) + abc^2(a - b)$. Делением обеих частей этого равенства на $(a - b)$ получается равенство $ab + bc + ca = abc(a + b + c)$, откуда делением на abc получается равенство, которое нужно доказать. **884.** Полезно ввести обозначение $S_n = x^n + y^n$, где n — натуральное число. По условию $S_1 = x + y = a$, $xy = b$. Поэтому $S_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$. Показать, что при $n \geqslant 3$ справедлива формула $S_n = aS_{n-1} - bS_{n-2}$. По этой формуле поочерёдно выразить S_3, S_4, S_5, S_6 через a и b. **885.** 1) Сначала сложить третью и четвёртую дроби данного выражения, к результату прибавить вторую дробь и к последнему результату прибавить первую дробь. 2) Привести дроби к общему знаменателю и упростить числитель полученной дроби. 3) Показать, что при $1 \leqslant x \leqslant 2$ справедливы равенства $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{(1 + \sqrt{x - 1})^2} = 1 + \sqrt{x - 1}$, $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{(1 - \sqrt{x - 1})^2} = |1 - \sqrt{x - 1}| = 1 - \sqrt{x - 1}$. 4) Сначала показать, что при данных условиях подкоренные выражения данного выражения положительны и его знаменатель не равен нулю, затем исключить иррациональность в знаменателе умножением числителя и знаменателя на $(\sqrt{m + x} + \sqrt{m - x})$. При дальнейших преобразованиях воспользоваться равенством $\sqrt{(n^2 - 1)^2} = 1 - n^2$ при $0 < n < 1$. **886.** 1)—4) Используя определение модуля числа, рассмотреть различные случаи значения модуля выражения, содержащего неизвестное. 5) Для краткости записи удобно ввести обозначение, например $x^2 + 3x = t$. 6) Удобно ввести обозначение, например $x^2+6x+5=t$. 7) Ввести обозначение $x+\frac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. 8) Данное уравнение можно записать так: $x(x+1)(x-1)(x+2)+1=0$, или, перемножая x на $(x+1)$ и $(x-1)$ на $(x+2)$, так: $(x^2+x)(x^2+x-2)+1=0$, поэтому удобно ввести обозначение $x^2+x=t$. 887. 1) Складывая уравнения системы, получаем $(x+y)^2=25$, откуда $x+y=\pm5$; далее применить способ подстановки. 2) Вычитая из второго уравнения первое, получаем $x+y=7$; далее применить способ подстановки. 3) Складывая уравнения системы, получаем $(x+y)^2+(x+y)-30=0$, откуда $x+y=5$ или $x+y=-6$; далее применить способ подстановки. 4) Складывая уравнения системы, получаем $x^2+x-12=0$, откуда $x=3$ или $x=-4$. Подставляя эти значения x в одно (любое) из уравнений системы, находим соответствующие значения y. 5) Вычитая из второго уравнения первое, возведённое в квадрат, получаем $xy=2$; далее применить способ подстановки. 6) Обозначая $x+y=u$, $xy=v$ и используя равенство задачи 884(2), получаем систему двух уравнений $u^4-4u^2v+2u^2-17u^2=0$, $v=2u$, которую можно решить способом подстановки. 7) Вычитая из первого уравнения второе, получаем $(y-2x)^2=1$, откуда $y=2x+1$ или $y=2x-1$. 8) Прибавляя к первому уравнению, умноженному на 5, второе, умноженное на 7, получаем уравнение $12y^2-19xy+5x^2=0$, решая которое как квадратное относительно y, находим $y=\frac{5x}{4}$ или $y=\frac{x}{3}$. 888. 1) Разделив второе уравнение на первое, получим уравнение $2y^2-5xy+2x^2=0$, решая которое как квадратное относительно y, находим $y=2x$ или $y=\frac{1}{2}x$. 2) Разделив второе уравнение на первое, получим $12y^2-25xy+12x^2=0$, откуда $y=\frac{4}{3}x$ или $y=\frac{3}{4}x$. 3) Из второго уравнения получаем $y^2=5x^2+4$. Подставляя это значение y^2 в первое уравнение системы, получаем $x^3-5x^2y-16x=0$, откуда или $x=0$, или $x^2-5xy=16$. При $x=0$ по формуле $y^2=5x^2+4$ находим $y=\pm1$. Во втором случае получается система двух уравнений $x^2-5xy=16$, $5x^2-y^2=$ $=-4$. Разделив первое уравнение на второе, получаем $4y^2+5xy-21x^2=0$, откуда $y=-3x$ или $y=\frac{7x}{4}$. 4) Обозначая $x+y=u$, $xy=v$ и используя равенство $x^2+y^2=u^2-2v$, получаем систему двух уравнений $u(u^2-2v)=5$, $v^2(u^2-2v)=20$. Разделив первое уравнение на второе, находим $u=\frac{1}{4}v^2$. Подставляя это значение u в одно из уравнений системы, получаем уравнение $v^6-32v^3-320=0$, квадратное относительно v^3, откуда $v=-2$ и тогда $u=1$, или $v=2\sqrt[3]{5}$ и тогда $u=\sqrt[3]{25}$. Возвращаясь к неизвестным x и y, получаем две системы $x+y=1$, $xy=-2$; $x+y=\sqrt[3]{25}$, $xy=2\sqrt[3]{5}$. Первая из них имеет два действительных решения $(2;\ -1)$ и $(-1;\ 2)$, а вторая не имеет действительных решений. 5) Обозначая $x+y=u$, $xy=v$ и используя равенство задачи 884(1), получаем систему двух уравнений $u=\frac{5}{2}v$, $8(u^3-3uv)=65$. Подставляя значение u из первого уравнения во второе, получаем уравнение $125v^3-60v^2-65=0$, которое с помощью разложения его левой части на множители можно записать так: $(v-1)(125v^2+65v+65)=0$, откуда $v=1$, так как уравнение $125v^2+65v+65=0$ не имеет действительных корней. 6) Сначала рассмотреть случаи $y=\pm x$. При $y\neq\pm x$, разделив первое уравнение на $x-y$, а второе — на $x+y$, получаем систему двух уравнений $x^2+xy+y^2=19$, $x^2-xy+y^2=7$. Вычитая из первого уравнения этой системы второе уравнение, получаем $2xy=12$, откуда $y=\frac{6}{x}$. 7) Разделив первое уравнение на второе, получаем $2y^2-5xy+2x^2=0$, откуда $y=2x$ или $y=\frac{1}{2}x$. 8) Перемножая уравнения, получаем $xy=8$, откуда $y=\frac{8}{x}$. **889.** 1) С помощью формулы корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$, показать, что это уравнение имеет равные корни (т. е. один корень) только тогда, когда $D=b^2-4ac=0$. В данном случае $D==r^2-4(2r-3)$. 2) Если корни квадратного уравнения действительные, то из теоремы Виета следует, что они являются противоположными числами только при $b=0$, т. е. в данном случае $b=r=0$. Осталось показать, что при $r=0$ корни данного уравнения действительные. **890.** Показать, что при $r>0$ корни данного квадратного уравнения действительные, поэтому $x_1+x_2=r$, $x_1x_2=-r$. Используя эти равенства и равенства задачи 884(1), показать, что $x_1^3+x_2^3+(x_1x_2)^3=3r^2$. **891.** Доказать, что в данном случае $D=((a+b)^2-c^2)((a-b)^2-c^2)$. **892.** Доказать равенство $\left(r+\frac{1}{r}\right)^2p^2-4q\left(r-\frac{1}{r^2}\right)=4p^2+\left(r-\frac{1}{r}\right)^2(p^2-4q)$. **893.** Пусть рациональное число $x=\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, является корнем данного уравнения, т. е. $\frac{m^2}{n^2}+p\frac{m}{n}+q=0$. Тогда $\frac{m^2}{n}=-pm-qn$ — целое число, поэтому $n=1$. **894.** Данное биквадратное уравнение имеет четыре различных действительных корня только тогда, когда уравнение $t^2-(a+b)t+ab=0$ имеет два действительных различных положительных корня, т. е. когда, во-первых, $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$, откуда $a\neq b$, и, во-вторых, по теореме Виета $a+b>0$ и $ab>0$, откуда $a>0$, $b>0$. **895.** Корни данного уравнения действительные, так как $4(r-1)^2-4(2r+1)=4r^2-16r>0$ при $r<0$. По теореме Виета оба корня отрицательны только тогда, когда $r-1<0$ и $2r+1>0$. **896.** Сначала рассмотреть случаи, когда первый коэффициент $r^2-1=0$, т. е. $r=\pm 1$. При $r\neq\pm 1$ данное неравенство является квадратным. Так как оно должно выполняться при всех действительных значениях x, то уравнение $(r^2-1)x^2+2(r-1)x+1=0$ не должно иметь действительных корней, т. е. должно выполняться условие $4(r-1)^2-4(r^2-1)<0$, откуда $r>1$. Таким образом, если $r>1$, то квадратичная функция $y(x)=(r^2-1)x^2+2(r-1)x+1$ при всех действительных значениях x принимает значения одного знака: или только положительные, или только отрицательные. Осталось заметить, что $y(0)=1>0$. **897.** Сначала показать, что $x^2+x+1>0$ при всех значениях x. Поэтому, умножая исходное двойное неравенство на x^2+x+1, получаем $\frac{1}{3}(x^2+x+1)\leqslant x^2-x+1\leqslant 3(x^2+x+1)$. В этом двойном неравенстве первое неравенство преобразовать к виду $(x-1)^2\geqslant 0$, а второе — к виду $(x+1)^2\geqslant 0$. **898.** Пусть x — общий действительный корень данных уравнений, т. е. $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ — верные равенства. Вычитая из первого равенства второе, получаем $(a-1)(x-1)=0$. Если $a=1$, то исходные уравнения одинаковы и не имеют действительных корней. Следовательно, общим корнем может быть только $x=1$. Подставляя $x=1$ в первое уравнение, находим $a=-2$. Проверка показывает, что при $a=-2$ оба уравнения имеют общий корень $x=1$. **899.** Пусть x_1 — общий корень данных уравнений, x_2 — второй корень первого уравнения, x_3 — второй корень второго уравнения. Вычитая из равенства $x_1^2+ax_1+bc=0$ равенство $x_1^2+bx_1+ac=0$, получаем $(a-b)(x_1-c)=0$. Так как $a\neq b$, то $x_1=c$. Подставляя $x=c$ в первое уравнение, получаем $c(a+b+c)=0$. Так как $c\neq 0$, то $a+b+c=0$. По теореме Виета находим $x_2=b$, $x_3=a$. Осталось проверить, что если $a+b+c=0$, то $x_1=c$, $x_2=b$ — корни первого уравнения, $x_1=c$, $x_3=a$ — корни второго уравнения, $x_2=b$, $x_3=a$ — корни третьего уравнения. **900.** Сначала рассмотреть случай $r=4$. При $r\neq 4$ данное уравнение является квадратным. Показать, что корни уравнения $x^2+px+q=0$ положительны только тогда, когда $p^2-4q\geqslant 0$, $p<0$, $q>0$. Поэтому при $r\neq 4$ задача сводится к решению системы трёх неравенств: $9-2r\geqslant 0$, $\frac{3-r}{r-4}<0$, $\frac{r}{r-4}>0$. **901.** Воспользоваться формулой корней квадратного уравнения и теоремой Виета. **902.** Сначала рассмотреть случай $r=0$. При $r\neq 0$ данное уравнение имеет действительные корни только при условии $(r+1)^2-8r\geqslant 0$, откуда $r\leqslant 3-2\sqrt{2}$ или $r\geqslant 3+2\sqrt{2}$. Пусть $r>0$. Тогда графиком функции $y=y(x)=2rx^2-(r+1)x+1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. С помощью эскиза графика показать, что нули x_1, x_2 этой функции принадлежат интервалу $-1<x<1$ только тогда, когда абсцисса $x_0=\frac{r+1}{4r}$ вершины параболы также принадлежит этому интервалу и $y(-1)>0$, $y(1)>0$. Получается системы трёх неравенств: $-1<\frac{r+1}{4r}<1$, $2r+(r+1)+1>0$, $2r-(r+1)+1>0$. Решая эту систему, получаем $r>\frac{1}{3}$. Далее показать, что $3-2\sqrt{2}<\frac{1}{3}<3+2\sqrt{2}$. Следовательно, $r\geqslant 3+2\sqrt{2}$. Аналогично рассмотреть случай $r<0$. **903.** С помощью эскиза графика функции $y=x^2+px+q$ показать, что $y(-1)<0$, $y(1)<0$. **904.** 1) Так как график функции $y=ax^2+bx+c$ не имеет общих точек с осью абсцисс и $y(1)=a+b+c>0$, то весь график расположен выше оси абсцисс, в частности $y(0)=c>0$. 2) Аналогично, как и в предыдущем случае, использовать условие $q-p+1=y(-1)<0$. **905.** Сначала доказать равенство $S_m=(x_1+x_2)S_{m-1}-x_1x_2S_{m-2}$. Поэтому $aS_m+bS_{m-1}+cS_{m-2}=(a(x_1+x_2)+b)S_{m-1}+(-ax_1x_2+c)S_{m-2}=0$, так как по теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. **906.** Пусть $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=t$. Тогда $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=t^2-2$ и данное выражение y таково: $y=3t^2-8t+4=3\left(t-\frac{2}{3}\right)(t-2)$. Если $ab<0$, то $t<0$ и $y=3t^2-8t+4>0$. Если $ab>0$, то $t=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}+2\geqslant 2$ и $y=3\left(t-\frac{2}{3}\right)(t-2)\geqslant 0$. **907.** Доказать равенство $x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3=(x-2y+1)^2+(y-1)^2+1$. **908.** Показать, что ордината вершины первой параболы равна $-a^2-2a$, а ордината вершины второй параболы равна $\frac{4a^2-1}{4a}$. Поэтому задача сводится к решению неравенства $\left(-a^2-2a-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4a^2-1}{4a}-\frac{3}{4}\right)<0$, которое можно решить методом интервалов. **909.** Показать, что задача сводится (как и в задаче 908) к решению неравенства $(-4a^2-a+5)\left(a-2-\frac{4}{a}+5\right)>0$. **910.** 1) $x^3-6x^2-x+30=x^3+2x^2-(8x^2-32)-x-2$. 2) Обозначая $x^2+x+1=t$, показать, что данное выражение равно $(t+4)(t-3)$. 3) $x^4-x^3-7x^2+x+6=x^4-x^3-(7x^2-7)+(x-1)=(x-1)(x^3-7x-7+1)=(x-1)(x^3+1-7(x+1))=(x-1)\times(x+1)(x^2-x+1-7)$. 4) Обозначая $x^2+4x+8=t$, показать, что данное выражение равно $(x+t)(2x+t)$. **911.** $x^5+x+1=x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x+1=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1-(x^4+x^3+x^2)=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)$. **912.** 1) Числитель равен $(x^2+1)^2(x-1)(x+1)$, знаменатель равен $(x^2+1)(x+1)$. 2) Числитель равен $(x+1)(x+2)(x-2)$, знаменатель равен $(x+1)^2(x-2)$. 3) Числитель равен $x^3(x-2)+(x-2)=(x+1)(x-2)\times(x^2-x+1)$, знаменатель равен $x^3-x^2+x-2x^2+2x-2=(x-2)(x^2-x+1)$. **914.** 1)—4) Воспользоваться методом интервалов. 5) Показать, что $|x^2-5x|=x^2-5x$ при $x\leqslant 0$ и при $x\geqslant 5$, $|x^2-5x|=-(x^2-5x)$ при $0<x<5$. 6) Рассмотреть случаи $x<-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{3}{4}$, $x\geqslant\frac{3}{4}$. 7) Показать, что данное неравенство таково: $|x+1||x+3|>|x+3|$. Поэтому нужно решить неравенство $|x+1|>1$ при условии $x\neq -3$. 8) Показать, что $x^2-x+1>0$ и $x^2-3x+4>0$ при всех значениях x. Поэтому данное неравенство таково: $x^2-x+1\leqslant x^2-3x+4$. **915.** Преобразовать в неравенство: 1) $(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$; 2) $(a-b)^2+a^2+4b^2\geqslant 0$; 3) $(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$; 4) $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqslant 0$; 5) $(a-b)^2\left(\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right)\geqslant 0$; 6) $a^2b^2(a-b)^2\geqslant 0$. **916.** Преобразовать в неравенство: 1) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\geqslant 0$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right)^2\geqslant 0$.

Предметный указатель

Абсолютная погрешность 77
Арифметический квадратный корень 125

Биквадратное уравнение 187

Вершина параболы 230

График квадратичной функции 249

Двойное неравенство 48
Действительное число 131

Иррациональное число 131

Квадратный корень 125
Квадратное неравенство 263
Квадратный трёхчлен 182
Квадратное уравнение 161
Квадратичная функция 226

Метод выделения полного квадрата 169
— интервалов 276
Микрокалькулятор 100
Модуль числа 61

Неполное квадратное уравнение 166
Неравенство с одним неизвестным 35
Нестрогое неравенство 30

Округление чисел 86
Основные свойства неравенств 39
Относительная погрешность 90

Парабола 230
Периодическая дробь 129
Посторонний корень 188
Практические приёмы приближённых вычислений 92
Приближённое значение величины 76
Приведённое квадратное уравнение 179

Растяжение графика функции 236
Рациональное число 7
Решение неравенства 35
— системы неравенств 48
— —, содержащей уравнение второй степени 200, 205

Свойства числовых неравенств 18
Сдвиг графика функции 242
Сжатие графика функции 237
Система неравенств с одним неизвестным 47
Сложение неравенств 24
Стандартный вид числа 93
Строгое неравенство 30

Теорема Виета 180
—, обратная теореме Виета 181
— о квадратном корне из дроби 147
— о квадратном корне из произведения 141
— о квадратном корне из степени 136
— о разложении квадратного трёхчлена на множители 182
Тождество 136
Точность измерения 81

Умножение неравенств 25
Уравнение параболы 243

Фокус параболы 231
Формула корней квадратного уравнения 173

Числовое неравенство 14
Числовой промежуток 49

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. НЕРАВЕНСТВА 5
§ 1. Положительные и отрицательные числа 6
§ 2. Числовые неравенства 14
§ 3. Основные свойства числовых неравенств. 17
§ 4. Сложение и умножение неравенств 24
§ 5. Строгие и нестрогие неравенства. 30
§ 6. Неравенства с одним неизвестным 34
§ 7. Решение неравенств 38
§ 8. Системы неравенств с одним неизвестным. Числовые промежутки. 47
§ 9. Решение систем неравенств. 54
§ 10. Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие модуль. 61
Упражнения к главе I. 67

ГЛАВА II. ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ 75
§ 11. Приближённые значения величин. Погрешность приближения. 76
§ 12. Оценка погрешности 80
§ 13. Округление чисел 85
§ 14. Относительная погрешность 89
§ 15. Практические приёмы приближённых вычислений 92
§ 16. Простейшие вычисления на микрокалькуляторе. 100
§ 17. Действия с числами, записанными в стандартном виде . 106
§ 18. Вычисления на микрокалькуляторе степени и числа, обратного данному. 111
§ 19. Последовательное выполнение операций на микрокалькуляторе. 115
Упражнения к главе II. 118

ГЛАВА III. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ 124
§ 20. Арифметический квадратный корень 125
§ 21. Действительные числа 128
§ 22. Квадратный корень из степени 135
§ 23. Квадратный корень из произведения 140
§ 24. Квадратный корень из дроби 146
Упражнения к главе III 152

ГЛАВА IV. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ 159
§ 25. Квадратное уравнение и его корни 160
§ 26. Неполные квадратные уравнения 166
§ 27. Метод выделения полного квадрата 169
§ 28. Решение квадратных уравнений 172
§ 29. Приведённое квадратное уравнение. Теорема Виета 179
§ 30. Уравнения, сводящиеся к квадратным 187
§ 31. Решение задач с помощью квадратных уравнений 193
§ 32. Решение простейших систем, содержащих уравнение второй степени 200
§ 33. Различные способы решения систем уравнений 205
§ 34. Решение задач с помощью систем уравнений 210
Упражнения к главе IV 215

ГЛАВА V. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ 224
§ 35. Определение квадратичной функции 225
§ 36. Функция $y=x^2$ 230
§ 37. Функция $y=ax^2$ 235
§ 38. Функция $y=ax^2+bx+c$ 241
§ 39. Построение графика квадратичной функции 248
Упражнения к главе V 255

ГЛАВА VI. КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА 261
§ 40. Квадратное неравенство и его решение 262
§ 41. Решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции 268
§ 42. Метод интервалов 275
Упражнения к главе VI 281

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ VIII КЛАССА 285

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ 302

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ VII КЛАССА 308

ОТВЕТЫ 315

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 334

Учебное издание

Колягин Юрий Михайлович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА

8 класс

Учебник для общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Н. Сорокина*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор и верстальщик *Т. М. Якутович*
Корректоры *Н. А. Юсупова, Т. А. Лебедева*
Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковская, И. В. Губина*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 11.12.12. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура NewtonC SP. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 17,11+ 0,51 форз. Доп. тираж 10 000 экз. Заказ № 34776 (II-Пм).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа»
214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1
Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru

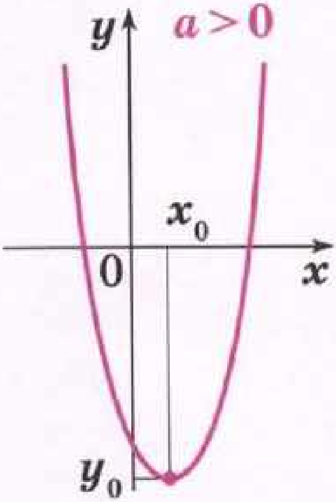
Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

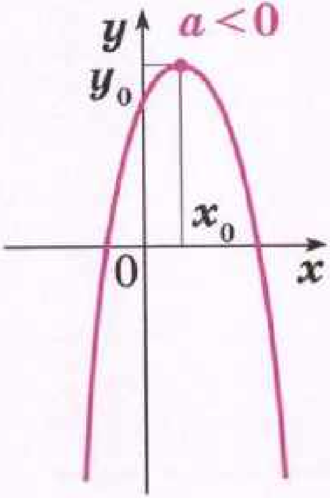
$$x_0 = -\frac{b}{2a},\quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$y = ax^2 + bx + c$$



Наименьшее значение функции

$$y_0 = y(x_0)$$



Наибольшее значение функции

$$y_0 = y(x_0)$$

Квадратные корни

$$\textit{если } a \geqslant 0, \textit{ то } \sqrt{a} \geqslant 0, \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\textit{если } a \geqslant 0, b \geqslant 0, \textit{ то } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\textit{если } a \geqslant 0, b > 0, \textit{ то } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Формулы Виета

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$