# Алгебра

# 8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ФГОС

# Алгебра

## 8 класс

Учебник
для общеобразовательных
организаций

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

Москва
«Просвещение»
2013

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы:

Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва,
Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/589 от 14.10.2011) и Российской академии образования (№ 01-5/7д-340 от 17.10.2011)

А45 Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин]. — М. : Просвещение, 2013. — 336 с. : ил. — ISBN 978-5-09-028135-5.

Данный учебник является второй частью комплекта учебников алгебры для 7—9 классов, отвечающих всем требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. Изложение учебного материала ведётся на доступном уровне с учётом деятельностного подхода. Основными содержательными линиями курса являются: числовая, уравнений, неравенств, функциональная, алгебраических преобразований, стохастическая, логических высказываний, мировоззренческая. Учебник содержит материал, изложенный в форме занимательных диалогов, развивающий метапредметные умения и личностные качества учащихся.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-028135-5

# Уважаемые восьмиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучать алгебру по учебникам, созданным нашим авторским коллективом. Этот учебник имеет ту же структуру и те же рубрики, что и учебник 7 класса. Поэтому **правила работы с учебником** остаются прежними. Напомним основные из них.

После изучения текста параграфа отвечайте на Устные вопросы: находите ответы на них в тексте, учите определения новых понятий, теоремы, алгоритмы. С помощью Вводных упражнений повторяйте ранее изученное, чтобы было легче усваивать новый материал и выполнять основные упражнения по теме.

Читайте Диалоги об истории, чтобы расширить свой кругозор и понять, откуда и почему появилось в алгебре то или иное понятие, в какие века люди уже знали то, что вам только ещё предстоит узнать. Обращайте внимание на Диалоги о важном. В них вы найдёте ответы на часто задаваемые вопросы, узнаете каким образом изученные понятия применяются в других областях знаний и на практике.

В разделах Это интересно вы найдёте любопытные сведения о происхождении и использовании полученных знаний. Изучайте материалы разделов Шаг вперёд — с их помощью вы сможете углубить и расширить свои знания по теме.

Если в тексте учебника вы встретите забытый термин, то в Предметном указателе в конце учебника посмотрите номер страницы, на которой можно найти его определение.

После изучения каждой главы проверяйте свои знания и умения с помощью задач рубрики Проверь себя! Эти задания разделены на три уровня сложности, как и основные упражнения учебника: обязательный, продвинутый и сложный. Интересующиеся математикой школьники найдут в конце учебника много непростых заданий в разделе Задачи повышенной сложности. После решения всех задач и упражнений сверяйте свои ответы с ответами, приведёнными в конце учебника.

Внутри текста используются следующие обозначения:

►, ◁ — начало и окончание решения задачи;

●, ○ — начало и окончание обоснования утверждения или вывода формулы.

Выделение основного материала, например:

**Вообще при возведении отрицательного числа в чётную степень получается положительное число. При возведении отрицательного числа в нечётную степень получается отрицательное число.**

Материал, который важно знать, например:

**Рациональными числами** называют числа вида $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое, $n$ — натуральное число.

Определение, например:

**Число $a$ больше числа $b$, если разность $a-b$ положительна.**
**Число $a$ меньше числа $b$, если разность $a-b$ отрицательна.**

Порядок действий, алгоритм, например:

Для решения неравенства с одним неизвестным, которое сводится к линейному, нужно:

1) перенести члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1);
2) приведя подобные члены, разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

**Образец действий, например:**

Доказать, что $5a+2b<0$, если $a<0$ и $b<0$.

Так как $5>0$ и $a<0$, то по свойству 3 имеем, $5a<0$. Аналогично $2b<0$. По свойству 2 сумма двух отрицательных чисел отрицательна, поэтому $5a+2b<0$.

**17.** — обязательные упражнения

**43.** — дополнительные более сложные упражнения

$\boxed{\textbf{85.}}$ — трудные упражнения

ГЛАВА I

# Неравенства

Сравнивать величины и количества при решении практических задач приходилось ещё с древних времён. Тогда же появились и такие слова, как *больше* и *меньше*, *выше* и *ниже*, *легче* и *тяжелее*, *тише* и *громче*, *дешевле* и *дороже* и т. д., обозначающие результаты сравнения однородных величин.

Понятия *больше* и *меньше* возникли в связи со счётом предметов, измерением и сравнением величин. Например, математики Древней Греции знали, что сторона любого треугольника меньше суммы двух других сторон и что против большего угла в треугольнике лежит бо́льшая сторона. Архимед, занимаясь вычислением длины окружности, установил, что периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых диаметра.

Символически записывать соотношения между числами и величинами с помощью знаков > и < начали лишь в XVII—XVIII вв. Например, вместо фразы «число $a$ больше числа $b$» стали писать: $a>b$. Записи, в которых два числа соединены одним из знаков: > (больше), < (меньше), $\geqslant$ (больше или равно), $\leqslant$ (меньше или равно), стали называть *неравенствами*.

С числовыми неравенствами вы встречались и в младших классах. Знаете, что неравенства могут быть верными, а могут быть и неверными.

Например, $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$ — верное числовое неравенство, $0{,}23>0{,}235$ — неверное числовое неравенство.

Неравенства, в которые входят неизвестные, могут быть верными при одних значениях неизвестных и неверными при других. Например, неравенство $2x+1>5$ верное при $x=3$, а при $x=-3$ — неверное. Для неравенства с одним неизвестным можно поставить задачу: решить неравенство. Задачи решения неравенств на практике ставятся и решаются не реже, чем задачи решения уравнений. Например, многие экономические проблемы сводятся к исследованию и решению систем линейных неравенств. Во многих разделах математики неравенства встречаются чаще, чем уравнения.

Некоторые неравенства служат единственным вспомогательным средством, позволяющим доказать или опровергнуть существование определённого объекта, например, корня уравнения.

В этой главе вы узнаете свойства неравенств, научитесь решать неравенства. Полученные умения вам понадобятся при изучении материала следующей главы, для решения практических задач, а также задач физики и геометрии.

## § 1 Положительные и отрицательные числа

В прошлом году вы узнали, что алгебра своим рождением обязана арифметике, а под буквами в алгебраических выражениях «скрываются» числа. Поэтому действия с алгебраическими выражениями подчиняются тем же свойствам и правилам, что и арифметические действия с числами. В этом параграфе будет показано применение знакомых вам свойств при сравнении с нулём значений различных выражений. Будут обобщены все полученные вами знания о действиях с положительными и отрицательными рациональными числами.

**Нужно вспомнить:**

- действия с числами с одинаковыми и разными знаками;
- правила сравнения обыкновенных дробей;
- правила сравнения десятичных дробей;
- изображение чисел точками на числовой оси;
- действия с многочленами и алгебраическими дробями;
- решение линейных уравнений с одним неизвестным.

Рациональное число может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

**Положительное рациональное число** — это число вида $\frac{k}{n}$, где $k$ и $n$ — натуральные числа. Например, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{4}{8}$ — положительные рациональные числа.

**Отрицательное рациональное число** — это число вида $-\frac{k}{n}$, где $k$ и $n$ — натуральные числа. Например $-\frac{2}{3}$, $-\frac{8}{5}$, $-\frac{4}{8}$ — отрицательные рациональные числа. Отрицательное рациональное число можно записать в виде $\frac{-k}{n}$. Например, $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}$.

**Рациональными числами** называют числа вида $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое, $n$ — натуральное число.

Если рациональное число можно представить в виде дроби, у которой знаменатель является натуральной степенью числа 10, то это рациональное число обычно записывают в виде десятичной дроби. Например:

$$\frac{257}{1000}=0{,}257; \qquad \frac{-324}{10}=-32{,}4.$$

Положительные числа называют **бо́льшими нуля**, а отрицательные — **меньшими нуля**. Для того чтобы коротко записать, что число больше или меньше нуля, используют знаки неравенства > (больше) и < (меньше). Так, запись $a>0$ означает, что число $a$ больше нуля, т. е. $a$ — положительное число; запись $b<0$ означает, что число $b$ меньше нуля, т. е. $b$ — отрицательное число. Например: $25>0$, $-21<0$.

Числа $a$ и $-a$ — противоположные числа. Если $a>0$, то $-a<0$; если $a<0$, то $-a>0$.

Знаки > и < называют **противоположными**. Так, $5>0$ и $7>0$ — неравенства одинакового знака, а $3>0$ и $-2<0$ — неравенства противоположных знаков.

В дальнейшем будут использоваться следующие **свойства чисел**:

| Формулировка с помощью букв | Словесная формулировка |
|---|---|
| 1. Если $a>0$ и $b>0$, то $a+b>0$, $ab>0$, $\frac{a}{b}>0$. | Сумма, произведение и частное двух положительных чисел — положительные числа. |
| 2. Если $a<0$ и $b<0$, то $a+b<0$, $ab>0$, $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$. | Сумма отрицательных чисел отрицательна, а произведение и частное двух отрицательных чисел положительны. |
| 3. Если $a>0$ и $b<0$, то $ab<0$, $\frac{a}{b}<0$, $\frac{b}{a}<0$. | Произведение и частное положительного и отрицательного чисел отрицательны. |
| 4. Если $ab>0$, то или $a>0$ и $b>0$, или $a<0$ и $b<0$. Если $\frac{a}{b}>0$, то или $a>0$ и $b>0$, или $a<0$ и $b<0$. | Если произведение или частное двух чисел положительно, то эти числа имеют одинаковые знаки (т. е. оба числа положительны или оба отрицательны). |

| Формулировка с помощью букв | Словесная формулировка |
|---|---|
| 5. Если $ab<0$, то или $a>0$ и $b<0$, или $a<0$ и $b>0$. Если $\frac{a}{b}<0$, то или $a>0$ и $b<0$, или $a<0$ и $b>0$. | Если произведение или частное двух чисел отрицательно, то эти числа имеют разные знаки (т. е. одно из них положительно, а другое отрицательно). |
| 6. Если $ab=0$, то или $a=0$, $b\neq 0$, или $a\neq 0$, $b=0$, или $a=0$, $b=0$. | Если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы одно из этих чисел равно нулю. |
| 7. Если $\frac{a}{b}=0$, то $a=0$, $b\neq 0$. | Если дробь равна нулю, то её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. |

На числовой оси положительные числа изображаются точками, лежащими правее точки 0, а отрицательные числа — точками, лежащими левее точки 0 (рис. 1).

Для краткости вместо слов «точка, изображающая число $a$» говорят просто «точка $a$». Например, можно сказать, что точка 3 лежит правее точки 0; точка $-2$ лежит левее точки 0.


*Рис. 1*

**Задача 1.** Доказать, что если $a<0$, то $a^2>0$ и $a^3<0$.

► По условию $a<0$. Так как $a^2=a\cdot a$, а произведение двух отрицательных чисел положительно, то $a^2>0$. По свойству степени $a^3=a^2\cdot a$, т. е. $a^3$ является произведением положительного числа $a^2$ и отрицательного числа $a$, поэтому $a^3<0$. ◁

Вообще при возведении отрицательного числа в чётную степень получается положительное число. При возведении отрицательного числа в нечётную степень получается отрицательное число.

Например, $(-2{,}8)^6>0$, $(-1{,}2)^5<0$.

**Задача 2.** Решить уравнение $(2x+1)(3x-9)=0$.

► Данное произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, т. е. если $2x+1=0$ или $3x-9=0$. Решая уравнение $2x+1=0$, находим $x=-\frac{1}{2}$; решая уравнение $3x-9=0$, находим $x=3$.

Ответ. $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=3$. ◁

**Задача 3.** Решить уравнение $\frac{x^2+5x}{x^2+25}=0$.

▶ Данная дробь равна нулю, если $x^2+5x=0$, а $x^2+25\neq 0$. Уравнение $x^2+5x=0$ можно записать так: $x(x+5)=0$. Это уравнение имеет корни $x_1=0$, $x_2=-5$. При $x=0$ и $x=-5$ знаменатель $x^2+25$ не равен нулю.

Ответ. $x_1=0$, $x_2=-5$. ◁

**Задача 4.** Решить уравнение $\frac{x^2-25}{x+5}=0$.

▶ Данная дробь равна нулю, если $x^2-25=0$, а $x+5\neq 0$. Уравнение $x^2-25=0$ можно записать в виде

$$(x-5)(x+5)=0,$$

откуда $x_1=5$, $x_2=-5$. При $x=5$ знаменатель $x+5\neq 0$, а при $x=-5$ знаменатель $x+5=0$. Следовательно, $x=-5$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ. $x=5$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Какие числа называют рациональными?
2. В каком виде можно записать отрицательное рациональное число?
3. Что означает запись: $k>0$; $p<0$?
4. Привести пример неравенства одинакового знака; противоположных знаков.
5. Какими свойствами обладает сумма; произведение; частное рациональных чисел?
6. В каком случае произведение двух чисел равно нулю?
7. В каком случае частное двух чисел равно нулю?
8. Положительным или отрицательным числом будет результат возведения отрицательного числа в чётную степень; в нечётную степень?

## Вводные упражнения

**1.** На числовой оси отметить числа 0; $-3{,}5$; 4; $\frac{-1}{4}$.

**2.** Из чисел $-3$; 4; 0; $\frac{7}{10}$; $-4$; 15; $-\frac{27}{3}$; $-11{,}3$; 1,2; $-13\frac{1}{2}$; $\frac{24}{6}$ выбрать:

1) натуральные числа; 2) целые числа;
3) положительные числа; 4) отрицательные числа.

**3.** Для каждого из чисел $-1$; 5; $-\frac{4}{5}$; $2\frac{1}{7}$; $-1\frac{2}{3}$; $a$; $-\frac{1}{b}$ записать число:

1) противоположное данному; 2) обратное данному.

**4.** С помощью знака неравенства записать результат сравнения с нулём числа $-0{,}3$; $\frac{5}{6}$; $5\frac{3}{7}$; $-3{,}1$.

**5.** Вычислить:

1) $-6{,}8+(-2{,}2)$; 2) $-4{,}3-1{,}7$; 3) $-7{,}2:0{,}9$; 4) $-35\cdot(-0{,}1)$.

## Упражнения

Вычислить устно (1—4).

**1.** 1) $1{,}2\cdot 6$; 2) $\frac{1}{2}\cdot(-2)$; 3) $\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)$; 4) $(-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$.

**2.** 1) $0{,}2\cdot 6\cdot 5$; 2) $(-2)\cdot 4\cdot 5$; 3) $0{,}2\cdot(-5)\cdot 6$;
4) $5\cdot(-0{,}2)\cdot(-4)$; 5) $(-6)\cdot 0{,}4\cdot(-5)$; 6) $(-6)\cdot(-4)\cdot(-3)$.

**3.** 1) $36:3$; 2) $(-36):2$; 3) $655:(-5)$;
4) $(-0{,}4):8$; 5) $(-80):(-16)$; 6) $(-0{,}9):(-0{,}3)$.

**4.** 1) $2\cdot(-15):3$; 2) $(-0{,}4)\cdot(-5):2$; 3) $6\cdot(-8):(-12)$;
4) $(-6)\cdot(-12):(-8)$; 5) $(-45):3\cdot(-2)$; 6) $(-55):(-11)\cdot(-3)$.

**5.** Найти числовое значение выражения:

1) $a^3b^2c^2$ при $a=-1$, $b=-3$, $c=2$;
2) $ab^3c^2$ при $a=-2$, $b=-1$, $c=-3$;
3) $\frac{a^3b^2}{c^3}$ при $a=-2$, $b=-3$, $c=-1$;
4) $\frac{ab^3}{c^2}$ при $a=8$, $b=-1$, $c=-2$.

**6.** Используя знак > или <, записать утверждение:

1) $-11,7$ — отрицательное число;
2) $98,3$ — положительное число;
3) $x$ — отрицательное число;
4) $y$ — положительное число.

**7.** Пусть $a>0$, $b>0$. Доказать, что:

1) $2a(a+3b)>0$; 2) $(a+b)(2a+b)>0$.

Доказать, что $5a+2b<0$, если $a<0$ и $b<0$.

Так как $5>0$ и $a<0$, то по свойству 3 имеем, $5a<0$. Аналогично $2b<0$. По свойству 2 сумма двух отрицательных чисел отрицательна, поэтому $5a+2b<0$.

**8.** Пусть $a<0$, $b<0$. Доказать, что:

1) $3a+4b<0$; 2) $2a(a+b)>0$.

**9.** Пусть $a>0$, $b<0$. Доказать, что:

1) $a-b>0$; 2) $b-a<0$;
3) $a^2b+b^3<0$; 4) $ab^3+a^3b<0$.

**10.** Не вычисляя, выяснить, положительно или отрицательно значение выражения:

1) $(-17)\cdot(-1,281)^2$; 2) $(-2,23)^3\cdot(-0,54)^5$;
3) $(-0,37)^3+(-2,7)^5$; 4) $(-3,21)^2-(-45,4)^3$.

**11.** Доказать, что при любом $a$ значение выражения положительно:

1) $2-\dfrac{1}{a^2+1}$; 2) $a^2+\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$;
3) $(3a+2)^2-6a(a+2)$; 4) $(2a-3)^2-3a(a-4)$.

**12.** Доказать, что при любом $a$ значение выражения отрицательно:

1) $(-1,5)^3-a^2$; 2) $(-7)^5-(1-a)^4$;
3) $2a(4a-3)-(3a-1)^2$; 4) $3a(a+4)-(2a+3)^2$.

**13.** Пусть $a<0$, $b>0$. Выяснить, положительно или отрицательно значение выражения:

1) $a^3b^4$; 2) $\dfrac{a^2}{b^3}$; 3) $(2a-b)(2b-a)$; 4) $\dfrac{3b-2a}{3a-2b}$.

**14.** Выяснить, положительно или отрицательно число $a$, если:

1) $-a<0$; 2) $-a>0$; 3) $a^2a^3>0$;

4) $a^4a^3<0$; 5) $\frac{a^5}{a^2}>0$; 6) $\frac{a^4}{a^3}<0$.

**15.** Пусть $a<0$. Выяснить, положительно или отрицательно число $b$, если:

1) $ab>0$; 2) $ab<0$; 3) $\frac{a}{b}<0$;

4) $\frac{b}{a}>0$; 5) $ab=-1$; 6) $\frac{a}{b}=2$.

**Решить уравнение (16—24).**

**16.** 1) $x(x+1)=0$; 2) $x(x-2)=0$;
3) $(x-2)(x+3)=0$; 4) $(x+4)(x+5)=0$.

**17.** 1) $(3x-1)(x+5)=0$; 2) $(2x+3)(x+1)=0$;
3) $(1+2x)(3x-2)=0$; 4) $(5x-3)(2+3x)=0$.

**18.** 1) $x^2+x=0$; 2) $x^2-x=0$; 3) $5x-x^2=0$; 4) $3x^2+4x=0$.

**19.** 1) $x^2-9=0$; 2) $16-x^2=0$; 3) $25-4x^2=0$; 4) $49x^2-16=0$.

**20.** 1) $\frac{x+1}{x-2}=0$; 2) $\frac{x-1}{x+2}=0$; 3) $\frac{2x-1}{3x+1}=0$; 4) $\frac{1+2x}{2x-5}=0$.

**21.** 1) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$; 2) $\frac{x^2-1}{x-1}=0$; 3) $\frac{x^2+5x}{x}=0$; 4) $\frac{x-3x^2}{x}=0$.

**22.** 1) $\frac{x(x+2)}{x+1}=0$; 2) $\frac{x(x-2)}{x-3}=0$; 3) $\frac{(2x-1)(x-2)}{x+3}=0$;

4) $\frac{(x+3)(2x-4)}{x-1}=0$; 5) $\frac{x+2}{x^2-x-1}=0$; 6) $\frac{x-3}{x^2+x+1}=0$.

**23.** 1) $\frac{x^2-1}{x+2}=0$; 2) $\frac{x^2-49}{x-1}=0$; 3) $\frac{3x^2+x}{x-5}=0$; 4) $\frac{x-5x^2}{x+3}=0$.

$\boxed{\textbf{24.}}$ 1) $\frac{x}{x-5}-\frac{x-2}{x-6}=0$; 2) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{1-x}{x+3}=0$;

3) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0$; 4) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}=0$.

**25.** Доказать, что:

1) $\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}>0$, если $a>0$; 2) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}>0$, если $a<0$;

3) $\frac{2}{3a+2}-\frac{1}{a+1}<0$, если $a>0$; 4) $\frac{1}{1-a}-\frac{3}{3-2a}<0$, если $a<0$.

**26.** Вычислить ($n$ — натуральное число):

1) $\frac{(-1)^{6n}-(-1)^{2n+3}}{(-1)^{4n+1}+(-1)^{6n-1}}$; 2) $\frac{(-1)^{2n}+(-1)^{2n+1}}{(357-2,4)^6}$.

**27.** Доказать, что:

1) $\frac{a-1}{a+1}:\frac{1}{a^2+2a+1}+1>0$, если $a>0$;

2) $\frac{3a^2+4a+1}{(a+1)^2}-\frac{a-1}{a+1}>0$, если $a\neq-1$.

*Диалог об истории*

**Знаки неравенств**

Профессор, расскажите, пожалуйста, как и почему появились знаки неравенств.

Охотно расскажу. В древности неравенства, как и равенства, описывались словесно, без использования привычных для нас символов и обозначений. Я уже говорил вам, что знак = изобрёл в середине XVI в. *Роберт Рекорд (1510—1587)*. Знаки > и < первым стал использовать в начале XVII в. английский учёный *Томас Гарриот (1560—1621)*.

Любопытен следующий факт. Хотя знаки неравенств были придуманы на полвека позже, чем знак равенства, в математическую литературу они вошли раньше. Произошло это в основном потому, что европейские типографии тех лет для напечатания знака неравенства могли использовать уже имеющиеся литеры с латинской буквой V, поворачивая её в нужную сторону.

Литеры — это маленькие брусочки с выпуклыми зеркально отображёнными буквами?

Да, эти брусочки делали из металла или дерева. Для печати их рельефную часть — букву покрывали типографской краской и делали оттиск на бумаге. А само слово *литера* произошло от латинского *littera* — буква.

# § 2 Числовые неравенства

Вы умеете сравнивать целые числа, десятичные дроби. Знаете правила сравнения обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями, но разными числителями; с одинаковыми числителями, но разными знаменателями. А в этом параграфе вы научитесь сравнивать любые два числа с помощью нахождения знака их разности.

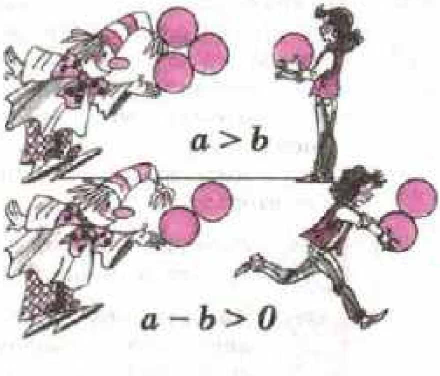
**Нужно вспомнить:**

- правила сравнения обыкновенных дробей;
- правила сравнения десятичных дробей;
- понятие противоположного числа;
- свойства действий с рациональными числами;
- формулы сокращённого умножения;
- действия с многочленами и алгебраическими дробями.

Сравнение чисел широко применяется на практике. Например, экономист сравнивает плановые показатели с фактическими, врач сравнивает температуру больного с нормальной, токарь сравнивает размеры вытачиваемой детали с эталоном. Во всех таких случаях сравниваются некоторые числа. В результате сравнения чисел возникают числовые неравенства.

Сравним, например, числа $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{4}$. Для этого найдём их разность:

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}.$$




Следовательно, $\frac{4}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}$, т. е. $\frac{4}{5}$ получается прибавлением к числу $\frac{3}{4}$ положительного числа $\frac{1}{20}$. Это означает, что число $\frac{4}{5}$ больше $\frac{3}{4}$ на $\frac{1}{20}$. Таким образом, $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$, так как их разность положительна.

**!** **Определение.** Число $a$ больше числа $b$, если разность $a-b$ положительна. Число $a$ меньше числа $b$, если разность $a-b$ отрицательна.

Если $a$ больше $b$, то пишут: $a>b$; если $a$ меньше $b$, то пишут: $a<b$.

**!** Таким образом, неравенство $a>b$ означает, что разность $a-b$ положительна, т. е. $a-b>0$. Неравенство $a<b$ означает, что $a-b<0$.

**Задача 1.** Доказать, что если $a>b$, то $b<a$.

► Неравенство $a>b$ означает, что $a-b$ — положительное число. Тогда $b-a=-(a-b)$ — отрицательное число, т. е. $b<a$. ◁

Для любых двух чисел $a$ и $b$ из следующих трёх соотношений $a>b$, $a=b$, $a<b$ только одно является верным.

Например, для чисел $-5$ и $-3$ неравенство $-5<-3$ является верным, а соотношения $-5=-3$ и $-5>-3$ не являются верными.

**Сравнить числа** $a$ и $b$ — значит выяснить, какой из знаков $>$, $=$ или $<$ нужно поставить между этими числами, чтобы получить верное соотношение. Это можно сделать, определив знак разности $a-b$.

**Задача 2.** Сравнить числа 0,79 и $\frac{4}{5}$.

► Найдём их разность:

$0{,}79-\frac{4}{5}=0{,}79-0{,}8=-0{,}01$. Так как $0{,}79-\frac{4}{5}<0$, то $0{,}79<\frac{4}{5}$. ◁

Геометрически неравенство $a>b$ означает, что на числовой оси точка $a$ лежит правее точки $b$ (рис. 2).

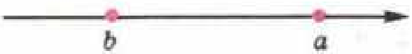



Рис. 2


Рис. 3

Например, точка $\frac{4}{5}$ лежит правее точки 0,79, так как $\frac{4}{5}>0{,}79$; точка 2,3 лежит левее точки 4,4, так как $2{,}3<4{,}4$ (рис. 3).

**Задача 3.** Доказать, что $a^2+b^2>2ab$, если $a\neq b$.

► Докажем, что разность $a^2+b^2-2ab$ положительна. В самом деле, $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$, так как $a\neq b$. ◁

**Задача 4.** Доказать, что $a+\frac{1}{a}>2$, если $a>0$ и $a\neq 1$.

▶ Докажем, что разность $a + \frac{1}{a} - 2$ положительна. Действительно, $a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} > 0$, так как $a > 0$ и $a \neq 1$. ◁

**Задача 5.** Доказать, что $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$, если $\frac{n}{m}$ — правильная дробь.

▶ Напомним, что дробь $\frac{n}{m}$ называется правильной, если $n < m$ ($n$ и $m$ — натуральные числа). Разность $\frac{n}{m} - \frac{n+1}{m+1} = \frac{n(m+1) - m(n+1)}{m(m+1)} = \frac{n-m}{m(m+1)}$ меньше нуля, так как $n - m < 0$, $m > 0$, $m + 1 > 0$. Следовательно, $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Привести пример сравнения числовых значений величин в практической деятельности человека.
2. В каком случае говорят, что:
   1) число $a$ больше числа $b$; 2) число $a$ меньше числа $b$?
3. Что означает неравенство $m > n$; $m < n$?
4. Что значит сравнить числа $a$ и $b$?
5. Как на числовой оси изображаются числа $p$, $q$, если $p < q$; $p > q$?
6. Пояснить, почему $a^2 - 2a + 1 > 0$ при $a \neq 1$.

## Вводные упражнения

1. (Устно.) Сравнить числа:

   1) $\frac{8}{15}$ и $\frac{7}{15}$; 2) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{8}$;

   4) 0,351 и 0,3501; 5) $1\frac{3}{7}$ и $-1\frac{3}{7}$; 6) −5,409 и −5,709.

2. Какое из данных чисел расположено на числовой оси левее:
   1) 1,25 или 1,26; 2) −3,78 или −3,08?
3. Объяснить, почему $a^2 - (1 + 2a^2) < 0$ при любом $a$.

## Упражнения

**28.** Используя определение числового неравенства, сравнить числа:

1) 0,3 и $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$ и 0,3; 3) $\frac{13}{40}$ и 0,35; 4) $-\frac{5}{8}$ и −0,7.

**29.** Сравнить числа $a$ и $b$, если:

1) $b-a=-1{,}3$; 2) $b-a=0{,}01$; 3) $a-b=(-5)^4$; 4) $a-b=-5^4$.

**30.** Доказать, что при любых значениях $a$ верно неравенство:

1) $a^2>(a+1)(a-1)$; 2) $(a+2)(a+4)>(a+1)(a+5)$.

**31.** Сравнить значения выражения $\frac{a^2}{(1+a)^2}\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a}\right)$

1) при $a=235$ и $a=785$; 2) при $a=-0{,}8$ и $a=-\frac{5}{6}$.

**32.** Доказать, что при любых значениях $a$ верно неравенство:

1) $a^3<(a+1)(a^2-a+1)$; 2) $(a+7)(a+1)<(a+2)(a+6)$;

3) $1+(3a+1)^2>(1+2a)(1+4a)$; 4) $(3a-2)(a+2)<(1+2a)^2$.

**33.** Доказать, что при любых значениях $a$ и $b$ верно неравенство:

1) $a(a+b)>ab-2$; 2) $2ab-1<b(2a+b)$;

3) $b(a+2b)>ab-3$; 4) $3ab-2<a(3b+a)$.

**34.** Два мальчика купили одинаковое число марок. Первый выбрал все марки по 50 р. Второй половину марок купил по 30 р., а остальные — по 60 р. Какой мальчик истратил денег больше?

**35.** Доказать, что если $a$, $b$, $c$ — положительные числа и $a>b$, то:

1) $\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b}$; 2) $\frac{b+c}{a+c}>\frac{b}{a}$.

**36.** Доказать, что если $a>0$, $b>0$ и $a\neq b$, то выполняется неравенство $a^4+b^4>a^3b+ab^3$.

**37.** Доказать, что если $a>-1$ и $a\neq 1$, то $a^3+1>a^2+a$.

## § 3 Основные свойства числовых неравенств

В предыдущем параграфе вы узнали, что для сравнения чисел $a$ и $b$ нужно определить знак разности этих чисел. А если уже известно, что $a>b$, обязательно ли для сравнения, например, чисел $a+c$ и $b+c$ сравнивать с нулём их разность? Может быть, лучше доказать некоторые свойства неравенств и в дальнейшем ссылаться на них? Так и поступают в математике. В этом параграфе рассматриваются свойства числовых неравенств, которые обычно называют основными, так как они часто используются при доказательстве других свойств неравенств и при решении многих задач.

**Нужно вспомнить:**
- свойства числовых равенств;
- свойства действий с числами с одинаковыми и разными знаками;
- понятие числового неравенства.

Основные свойства числовых неравенств сформулируем в виде теорем и следствий из них.

**ТЕОРЕМА 1** Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

● По условию $a>b$ и $b>c$. Это означает, что $a-b>0$ и $b-c>0$. Складывая положительные числа $a-b$ и $b-c$, получаем $(a-b)+(b-c)>0$, т. е. $a-c>0$. Следовательно, $a>c$. ○

Геометрически теорема 1 означает, что если на числовой оси точка $a$ лежит правее точки $b$ и точка $b$ лежит правее точки $c$, то точка $a$ лежит правее точки $c$ (рис. 4).

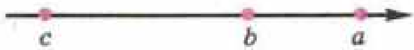



Рис. 4

**ТЕОРЕМА 2** Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то знак неравенства не изменится.

● Пусть $a>b$. Требуется доказать, что

$$a+c>b+c$$

для любого числа $c$. Рассмотрим разность

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b.$$

Эта разность положительна, так как по условию $a>b$. Следовательно, $a+c>b+c$. ○

**Следствие** Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

● Пусть $a>b+c$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства число $-c$, получаем $a-c>b+c-c$, т. е. $a-c>b$. ○

**ТЕОРЕМА 3** Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

● 1) Пусть $a>b$ и $c>0$. Докажем, что $ac>bc$.
По условию $a-b>0$ и $c>0$. Поэтому $(a-b)c>0$, т. е. $ac-bc>0$. Следовательно, $ac>bc$.

2) Пусть $a>b$ и $c<0$. Докажем, что $ac<bc$.
По условию $a-b>0$ и $c<0$. Поэтому $(a-b)c<0$, т. е. $ac-bc<0$. Следовательно, $ac<bc$. ○

Например, умножая обе части неравенства $\frac{1}{5}<0{,}21$ на 3, получаем $\frac{3}{5}<0{,}63$, а умножая обе части неравенства $\frac{1}{5}<0{,}21$ на $-4$, получаем $-\frac{4}{5}>-0{,}84$.

Заметим, что если $c\neq 0$, то числа $c$ и $\frac{1}{c}$ имеют один и тот же знак. Так как деление на $c$ можно заменить умножением на $\frac{1}{c}$, то из теоремы 3 вытекает следующее утверждение:

**Следствие** Если обе части неравенства разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится. Если обе части неравенства разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

Например, разделив обе части неравенства $0{,}99<1$ на 3, получим $0{,}33<\frac{1}{3}$, а разделив обе части неравенства $0{,}99<1$ на $-9$, получим $-0{,}11>-\frac{1}{9}$.

**Задача 1.** Доказать, что если $a>b$, то $-a<-b$.

► Умножая обе части неравенства $a>b$ на отрицательное число $-1$, получаем $-a<-b$. ◁

Например, из неравенства $1{,}9<2{,}01$ следует неравенство $-1{,}9>-2{,}01$; из неравенства $0{,}63>\frac{3}{5}$ следует неравенство $-0{,}63<-\frac{3}{5}$.

**Задача 2.** Доказать, что $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$, если $a>0$, $b>0$ и $a>b$.

▶ Разделив обе части неравенства $b<a$ на положительное число $ab$, получаем: $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. ◁

Отметим, что все свойства неравенств, рассмотренные в этом параграфе, доказаны для неравенства со знаком > (больше). Точно так же они доказываются и для неравенств со знаком < (меньше).

## Устные вопросы и задания

1. Как с помощью точек числовой оси можно проиллюстрировать теорему 1?
2. Сравнить числа $k$ и $m$, если $k<n$ и $n<m$.
3. Сформулировать теорему 2 и привести пример её использования.
4. Известно, что $x>y$. Изменится ли знак неравенства, если к обеим частям этого неравенства прибавить число $-10$?
5. Сформулировать следствие из теоремы 2. Привести пример его применения.
6. Изменится ли знак неравенства $b<c$, если обе его части:
   1) умножить на 0,05; 2) умножить на $-17{,}5$;
   3) разделить на $-1$; 4) разделить на $\frac{1}{2}$?

## Вводные упражнения

1. Сравнить числа:
   1) $-1$ и $0{,}7$; 2) $1{,}9$ и $-0{,}9$; 3) $-8{,}7$ и $-8{,}6$;
   4) $-3{,}45$ и $-3{,}46$; 5) $1\frac{5}{9}$ и $1\frac{4}{9}$; 6) $\frac{7}{8}$ и $\frac{7}{9}$.
2. Упростить: 1) $(a-2)^2-(a-1)(a+3)$; 2) $(b+4)(b-2)-(b-1)^2$.
3. К обеим частям уравнения $2x-3=5$ прибавить число: $-3$; 5; 3; $-5$.
4. Обе части уравнения $\frac{1}{3}x=4$ умножить на число: 3; $-3$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$.
5. Выяснить, положительным или отрицательным является число $a$, если: 1) $a+1<0$; 2) $a-1>0$.
6. Сравнить с нулём число $a$, если:
   1) $1{,}5a>0$; 2) $4{,}5a<0$; 3) $-7a>0$; 4) $-0{,}1a<0$.
7. Выяснить, положительным или отрицательным является значение выражения:
   1) $a-5$, если $a>5$; $a<5$; 2) $b+3$, если $b>-3$; $b<-3$;
   3) $(a-5)(b+3)$, если $a>5$, $b>-3$; $a<5$, $b<-3$.

## Упражнения

**38.** Доказать, что:

1) если $a-2<b$ и $b<0$, то $a-2$ — отрицательное число;

2) если $a^2-5>a$ и $a>1$, то $a^2-5>1$.

**39.** Выяснить, положительным или отрицательным является число $a$, если:

1) $a>b$ и $b>1$; 2) $a<b$ и $b<-2$;

3) $a-1<b$ и $b<-1$; 4) $a+1>b$ и $b>1$.

**40.** Записать неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $-2<4$ прибавить число: 1) 5; 2) −7.

**41.** Записать неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $2a+3b>a-2b$ прибавить число: 1) $2b$; 2) $-a$.

**42.** Записать неравенство, которое получится, если из обеих частей неравенства $3>1$ вычесть число: 1) 1; 2) −5.

**43.** Записать неравенство, которое получится, если из обеих частей неравенства $a-2b<3a+b$ вычесть число: 1) $a$; 2) $b$.

**44.** Пусть $a<b$. Сравнить числа:

1) $a+x$ и $b+x$; 2) $a-5$ и $b-5$.

**45.** Доказать, что:

1) если $4a-2b>3a-b$, то $a>b$;

2) если $2b-3a<3b-4a$, то $a<b$;

3) если $b(2a+1)<a(2b+1)$, то $a>b$;

4) если $b(1-3a)>a(1-3b)$, то $a<b$.

**46.** Доказать, что:

1) если $x(x+2)<(x-2)(x+3)$, то $x<-6$;

2) если $x(x+6)>(x+1)(x+4)$, то $x>4$;

3) если $(x-3)^2<x(x-5)$, то $x>9$;

4) если $x(3+x)<(x+2)^2$, то $x>-4$.

Умножить обе части данного неравенства на указанное число **(47—48)**.

**47.** 1) $3,35<4,5$ на 4; 2) $3,8>2,4$ на 5;

3) $\frac{5}{6}>\frac{2}{3}$ на −12; 4) $\frac{3}{4}<\frac{7}{8}$ на −16.

**48.** 1) $2a > 1$ на $0{,}5$; 2) $4a < -1$ на $0{,}25$;
3) $-4a < -3$ на $0{,}25$; 4) $-2a > -4$ на $-0{,}5$.

Разделить обе части данного неравенства на указанное число (49—50).

**49.** 1) $-2 < 5$ на $2$; 2) $4{,}5 > -10$ на $5$;
3) $-25 > -30$ на $-5$; 4) $-20 < -12$ на $-4$.

**50.** 1) $1{,}2a < 4{,}8$ на $1{,}2$; 2) $2{,}3a < -4{,}6$ на $2{,}3$;
3) $-\frac{2}{3}x < -\frac{1}{4}$ на $-\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{3}{4}x > \frac{1}{3}$ на $-\frac{3}{4}$.

**51.** Пусть $a$ — положительное число и $a < 1$. Доказать, что:
1) $a^2 < a$; 2) $a^3 < a^2$.

**52.** Пусть $a < b$. Сравнить числа:
1) $-4{,}3a$ и $-4{,}3b$; 2) $0{,}19a$ и $0{,}19b$;
3) $\frac{a}{4}$ и $\frac{b}{4}$; 4) $-\frac{a}{6}$ и $-\frac{b}{6}$;
5) $-2(a+4)$ и $-2(b+4)$; 6) $\frac{2}{3}(a-5{,}2)$ и $\frac{2}{3}(b-5{,}2)$.

**53.** Доказать, что:
1) если $5a - 2b > 2a + b$, то $a > b$;
2) если $4a - b < 2a + b$, то $a < b$;
3) если $2a + 2b < 6a - 2b$, то $a > b$;
4) если $4a - 5b > 7a - 8b$, то $a < b$.

**54.** Доказать, что:
1) если $(x-1)(x+2) > (x+1)(x-2)$, то $x > 0$;
2) если $(x+1)(x-8) > (x+2)(x-4)$, то $x < 0$;
3) если $(x-3)^2 < (4+x)(x-4)$, то $x > \frac{25}{6}$;
4) если $(x-3)(3+x) > (x+2)^2$, то $x < -\frac{13}{4}$.

$\boxed{55.}$ Может ли разность $a - b$ быть:
1) больше суммы $a + b$; 2) меньше суммы $a + b$;
3) равна сумме $a + b$; 4) больше $a$;
5) больше $b$; 6) равна $b$?
Привести примеры.

$\boxed{56.}$ Доказать, что:
1) $a + \frac{1}{a} < -2$, если $a < 0$ и $a \neq -1$;

2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$, если $ab>0$ и $a \neq b$;

3) $4y+\frac{1}{y}>4$, если $y>0$ и $y \neq \frac{1}{2}$;

4) $9x+\frac{1}{x}<-6$, если $x<0$ и $x \neq -\frac{1}{3}$.

**57.** Пусть $a>b$. Доказать, что:

1) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$, если $ab>0$; 2) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$, если $ab<0$.

**58.** Верно ли, что:

1) если $a<b$, то $\frac{a}{b}<1$; 2) если $\frac{a}{b}>1$, то $a>b$;

3) если $\frac{a}{b}<1$, то $\frac{b}{a}>1$; 4) если $a^2<1$, то $a<1$;

5) если $a>b$, то $a^2>b^2$; 6) если $a<b$, то $ab^2<b^3$?

**Разговор о важном**

Профессор, упражнение 58 имеет необычную формулировку, и я не знаю, как искать ответ на вопрос «Верно ли, что...?».

В упражнениях, начинающихся со слов «Доказать, что...», уже заложена подсказка — после слова *что* записано верное утверждение. А при вопросе «Верно ли, что...?» нужно либо доказать, что данное утверждение верно, либо показать, что оно неверно. Попробуем решить первое задание из этого упражнения.

▶ Рассмотрим разность $\frac{a}{b}-1$, где $a<b$, и сравним её с нулём. Итак, $\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$. Так как $a<b$, то числитель дроби отрицателен. Так как знак числа $b$ неизвестен, то при разных значениях $b \neq 0$ дробь $\frac{a-b}{b}$ может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому утверждение о том, что $\frac{a}{b}<1$ при $a<b$, неверно (например, при $a=-6$ и $b=-2$ имеем $\frac{a}{b}=3>1$). Однако можно сказать, что $\frac{a-b}{b}<0$, т. е. $\frac{a}{b}<1$ при $a<b$ и $b>0$. ◁

# § 4 Сложение и умножение неравенств

Вы знаете, что числовые равенства можно почленно складывать и умножать. В этом параграфе вы научитесь выполнять аналогичные действия с неравенствами. Умения почленно складывать и умножать неравенства часто применяются на практике. Эти действия помогают решать задачи оценивания и сравнения значений выражений.

**Нужно вспомнить:**

- свойства действий с рациональными числами;
- понятия неравенств одного знака и противоположных знаков;
- что означают неравенства $a > b$ и $a < b$;
- основные свойства числовых неравенств;
- формулы периметра и площади прямоугольника;
- неравенства треугольника.

При решении различных задач часто приходится складывать или умножать почленно левые и правые части неравенств. При этом иногда говорят, что неравенства складываются или умножаются. Например, если турист прошёл в первый день более 20 км, а во второй — более 25 км, то можно утверждать, что за два дня он прошёл более 45 км. Точно так же если длина прямоугольника меньше 13 см, а ширина меньше 5 см, то можно утверждать, что площадь этого прямоугольника меньше 65 см$^2$.

При рассмотрении этих примеров применялись следующие **теоремы о сложении и умножении неравенств:**

**ТЕОРЕМА 1** При сложении неравенств одинакового знака получается неравенство того же знака: если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

● Рассмотрим разность

$$(a+c)-(b+d)=a+c-b-d=(a-b)+(c-d).$$

По условию $a - b > 0$ и $c - d > 0$. Так как сумма положительных чисел положительна, то $(a+c)-(b+d)>0$, т. е. $a+c>b+d$. ○

Примеры:

1) $+\begin{array}{r} 3>2{,}5 \\ 5>4 \\ \hline 8>6{,}5 \end{array}$

2) $+\begin{array}{r} 1{,}2<1{,}3 \\ -3<-2 \\ \hline -1{,}8<-0{,}7 \end{array}$

**ТЕОРЕМА 2** При умножении неравенств одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, получается неравенство того же знака: если $a > b$, $c > d$ и $a$, $b$, $c$, $d$ — положительные числа, то $ac > bd$.

● Рассмотрим разность

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

По условию $a - b > 0$, $c - d > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Поэтому

$$c(a - b) + b(c - d) > 0,$$

т. е. $ac - bd > 0$, откуда $ac > bd$. ○

Примеры: 1) $\times\begin{array}{r} 3{,}2 > 3{,}1 \\ 3 > 2 \\ \hline 9{,}6 > 6{,}2 \end{array}$ 2) $\times\begin{array}{r} 1{,}8 < 2{,}1 \\ 4 < 5 \\ \hline 7{,}2 < 10{,}5 \end{array}$

**Задача 1.** Доказать, что если $a$, $b$ — положительные числа и $a > b$, то $a^2 > b^2$.

► Умножая неравенство $a > b$ само на себя, получаем $a^2 > b^2$. ◁

Аналогично можно доказать, что если $a$, $b$ — положительные числа и $a > b$, то $a^n > b^n$ при любом натуральном $n$.

Например, из неравенства $5 > 3$ следуют неравенства $5^5 > 3^5$, $5^7 > 3^7$ и т. д.

**Задача 2.** Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин больше полупериметра этого треугольника.

► Рассмотрим рисунок 5. Пусть $x$, $y$, $z$ — расстояния от внутренней точки $M$ до вершин треугольника $ABC$.

Из треугольников $AMB$, $AMC$, $BMC$ по теореме о сумме длин двух сторон треугольника имеем:

$$x + y > c, \ x + z > b, \ y + z > a.$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$2x + 2y + 2z > a + b + c,$$

откуда $x + y + z > \dfrac{a + b + c}{2}$. ◁

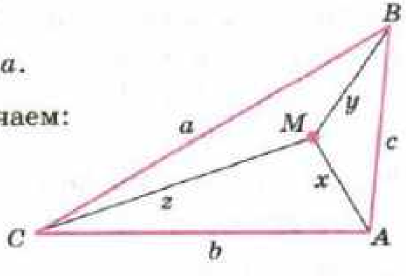



Рис. 5

## Устные вопросы и задания

1. Сформулировать теорему о сложении неравенств одинакового знака; об умножении неравенств одинакового знака.
2. В каком виде следует записать неравенства $a > 5$ и $3 < b$, чтобы к ним можно было применить теоремы сложения и умножения неравенств?
3. Обосновать, почему $a^2 < b^2$, если известно, что $a < b$, где $a$ и $b$ — положительные числа.

## Вводные упражнения

1. Не производя вычислений, сравнить с 1 значение суммы:
   1) $0{,}248 + 0{,}91$; 2) $0{,}32 + 0{,}84$.
2. Выяснить, положительным или отрицательным является число $x$, если:
   1) $x - 2y = 3$ и $2x + 2y = -1$; 2) $3x + y = -2$ и $-2x - y = 4$.
3. Умножить обе части равенства:
   1) $2a = 7$ на $2$; 2) $3a = 2$ на $-2$;
   3) $4x - 2 = 5$ на $-\frac{1}{2}$; 4) $6 - y = 0$ на $\frac{1}{3}$.

## Упражнения

**59.** (Устно.) Верно ли, что:
1) если $x > 7$ и $y > 4$, то $x + y > 11$;
2) если $x > 5$ и $y > 8$, то $xy < 40$;
3) если $x < -7$ и $y < 7$, то $x + y < 0$;
4) если $x < 2$ и $y < 5$, то $xy < 10$?

**60.** Выполнить сложение неравенств:
1) $5 > -8$ и $8 > 5$; 2) $-8 < 2$ и $3 < 5$;
3) $3x + y < 2x + 1$ и $3y - 2x < 14 - 2a$;
4) $3x^2 + 2y > 4a - 2$ и $5y - 3x^2 > 3 - 4a$.

**61.** Выполнить умножение неравенств:
1) $2\frac{2}{3} > 1\frac{1}{3}$ и $12 > 6$; 2) $6\frac{1}{4} < 9\frac{2}{3}$ и $4 < 6$;
3) $x - 2 > 1$ и $x + 2 > 4$; 4) $4 < 2x + 1$ и $3 < 2x - 1$.

**62.** Доказать, что если $a>2$ и $b>5$, то:
1) $3a+2b>16$; 2) $ab-1>9$; 3) $a^2+b^2>29$;
4) $a^3+b^3>133$; 5) $(a+b)^2>35$; 6) $(a+b)^3>340$.

**63.** Стороны треугольника меньше соответственно 73 см, 1 м 15 см и 1 м 11 см. Доказать, что его периметр меньше 3 м.

**64.** Куплены 4 тетради и 8 блокнотов. Цена тетради меньше 7 р., а блокнота меньше 40 р. Показать, что стоимость всей покупки меньше 350 р.

**65.** Пусть $a<2$, $b>3$. Доказать, что:
1) $a+3<b+2$; 2) $a-1<b-2$; 3) $b-3>a-2$; 4) $2b>2a+2$.

**66.** Пусть $a>2$, $b>3$, $c>1$. Доказать, что:
1) $a+b+c>6$; 2) $abc>6$; 3) $2ab+3abc>30$;
4) $abc+2ac>10$; 5) $a+ab+abc^2>13$; 6) $a^2+b^2+c^2>13$.

**67.** Сторона прямоугольника больше 7 см, другая в 3 раза больше её. Доказать, что периметр прямоугольника больше 56 см.

**68.** Длина прямоугольного участка в 5 раз больше его ширины, а ширина больше 4 м. Доказать, что площадь участка больше 80 м$^2$.

**69.** Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри прямоугольника, до его вершин больше полупериметра прямоугольника.

**70.** Доказать, что:
1) если $x+y>5$ и $x<2$, то $y>3$;
2) если $x-y<-3$ и $x>4$, то $y>7$;
3) если $a-3b<5$ и $a>-4$, то $b>-3$;
4) если $2a+3b>1$ и $a<2$, то $b>-1$.

**71.** Пусть $a>1$. Доказать, что: 1) $a^3>a$; 2) $a^5>a^2$.

**72.** Пусть $a<1$ и $a$ — положительное число. Доказать, что:
1) $a^3<a$; 2) $a^5<a^2$.

**73.** Пусть $a>b$ и числа $a$, $b$ отрицательные. Доказать, что:
1) $a^n>b^n$, если $n$ — нечётное натуральное число;
2) $a^n<b^n$, если $n$ — чётное натуральное число.

**74.** Пусть $a$ и $b$ — положительные числа и $n$ — натуральное число. Доказать, что если $a^n>b^n$, то $a>b$.

Разговор о важном

## Приложение свойств неравенств

Профессор, в начале параграфа было сказано, что действия с неравенствами имеют большое практическое значение. А Вы можете привести такой пример?

Пожалуйста. В торговле при перевозке товаров часто решают задачу оптимального использования грузоподъёмности транспорта. К примеру, имея автомобиль грузоподъёмностью 5 т, поставщик товаров решает такую задачу: «Можно ли за один рейс на этой машине перевезти 7 ящиков, масса каждого из которых меньше 300 кг, и ещё 13 ящиков, масса каждого из которых меньше 200 кг?»

Я попробую решить эту задачу. Во-первых, массы всех ящиков я выражу в тоннах, чтобы сравнивать их с грузоподъёмностью машины: 300 кг = 0,3 т, 200 кг = 0,2 т. Пусть масса ящика первого вида $m < 0{,}3$, а масса ящика второго вида $n < 0{,}2$. Тогда масса 7 ящиков первого вида $7 \cdot m < 7 \cdot 0{,}3$, т. е. $7m < 2{,}1$. Масса 13 ящиков второго вида $13 \cdot n < 13 \cdot 0{,}2$, т. е. $13n < 2{,}6$. Сложив почленно неравенства $7m < 2{,}1$ и $13n < 2{,}6$, получим, что $7m + 13n < 4{,}7$, т. е. такой груз гарантированно можно перевезти на 5-тонной машине.

Я бы поставщику товаров подсказал, что он может за этот рейс перевезти ещё один ящик любого вида, так как масса груза всё равно в этом случае будет меньше 5 т.

Шаг вперёд

## Оценка суммы

В прошлом году, когда вы изучали алгебраические дроби, я показывал вам некоторые искусственные приёмы нахождения сумм большого числа слагаемых. Помните, мы находили сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$ и показали, что она равна $\frac{99}{100}$.

Я помню, мы заменяли каждое слагаемое исходной суммы вида $\frac{1}{k(k+1)}$ разностью $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. После этого взаимно уничтожились все слагаемые, кроме первого и последнего, т. е. оставалось найти разность $\frac{1}{1}-\frac{1}{100}$.

Сегодня я хочу воспользоваться приобретённым вами опытом и новыми знаниями о неравенствах для того, чтобы доказать, что при любом натуральном $n$ выполняется неравенство $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$.

Пока я не вижу, как здесь можно применить старые и новые знания.

Попробуем сравнить каждое слагаемое суммы, стоящей в левой части неравенства (обозначим её буквой $S$), т. е. дробь вида $\frac{1}{k^2}$, с некоторым «удобным» для нас числом или выражением $A_k$. Оценим слагаемые таким образом, чтобы для каждого из них имелось неравенство вида $\frac{1}{k^2}<A_k$. Тогда я смогу почленно сложить все полученные неравенства и получить неравенство вида $S<A$. В идеале я хочу получить $A=1-\frac{1}{n}$, т. е. выражение, стоящее в правой части исходного неравенства.

Как можно применить новые знания, я уже понимаю. А какие старые знания нам понадобятся?

Скажи, ты не будешь возражать против следующей оценки каждого слагаемого суммы $S$: $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}$?

Конечно, не буду, ведь $k>k-1$, значит, дробь в левой части неравенства имеет больший знаменатель, чем дробь в правой части.

Хорошо. Теперь, вспоминая наш прошлогодний опыт, заменим $\frac{1}{(k-1)k}$ на разность $\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. Таким образом, $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, где $k=2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Складывая почленно неравенства для каждого $k$, получим $S<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}-$ $-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}$, что и требовалось доказать.

# § 5 Строгие и нестрогие неравенства

При разливе реки Невы вода в Санкт-Петербурге не поднималась выше отметки 423 см над уровнем Балтийского моря (такое страшное наводнение в городе, описанное в поэме А. С. Пушкина «Медный всадник», произошло в 1824 г.). Что означают слова «не поднималась выше, чем...»? Это значит, что при разливах реки её уровень либо доходил до указанной отметки (был равен этому уровню), либо был ниже (меньше). В этой фразе идёт речь о новом для вас виде неравенства — нестрогом неравенстве. Данный параграф посвящён рассмотрению действий с нестрогими неравенствами.

**Нужно вспомнить:**

- основные свойства числовых равенств и неравенств;
- теоремы сложения и умножения неравенств;
- формулы сокращённого умножения.

Неравенства со знаком > (больше) и < (меньше) называют **строгими.** Например, $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} < 1$, $a > b$, $c < d$ — строгие неравенства.

Наряду со знаками строгих неравенств > и < используются знаки $\geqslant$ (больше или равно) и $\leqslant$ (меньше или равно), которые называют знаками нестрогих неравенств. Неравенство $a \leqslant b$ означает, что $a < b$ или $a = b$, т. е. $a$ не больше $b$. Например, если число посадочных мест в самолёте 134, то число $a$ пассажиров может быть меньшим или равным 134. В этом случае можно записать: $a \leqslant 134$.

Точно так же неравенство $a \geqslant b$ означает, что число $a$ больше или равно $b$, т. е. $a$ не меньше $b$.

Неравенства, содержащие знак $\geqslant$ или знак $\leqslant$, называют **нестрогими.** Например, $18 \geqslant 12$, $11 \leqslant 12$, $7 \geqslant 7$, $4 \leqslant 4$, $a \geqslant b$, $c \leqslant d$ — нестрогие неравенства.

Все свойства строгих неравенств, сформулированные в § 3—4, справедливы и для нестрогих неравенств. При этом если для строгих неравенств противоположными считались знаки > и <, то для нестрогих неравенств противоположными считаются знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

Например, теорема 2 из § 3 справедлива и для нестрогих неравенств: если $a \geqslant b$, то $a + c \geqslant b + c$ для любого числа $c$. В самом деле, для случая $a > b$ эта теорема доказана в § 3, а для случая $a = b$ это утверждение выражает известное свойство равенств.

**Задача.** Доказать, что неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ верно при любых $a$ и $b$.

► В задаче 3 из § 2 доказано, что при $a \neq b$ выполняется строгое неравенство $a^2+b^2 > 2ab$. При $a=b$ неравенство превращается в очевидное равенство $2a^2=2a^2$. Следовательно, неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ верно при любых $a$ и $b$, причём знак равенства имеет место только при $a=b$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Какое неравенство называют строгим; нестрогим?
2. Что означает неравенство $a \leqslant b$; $a \geqslant b$?
3. Перечислить свойства нестрогих неравенств.
4. Назвать противоположные знаки строгих и нестрогих неравенств.
5. Дано неравенство $a \geqslant 5$. Объяснить, почему $a+10 \geqslant 15$ является верным неравенством. Является ли верным неравенство $-5a \leqslant -25$?

## Вводные упражнения

1. К обеим частям неравенства $2a-3<5$ прибавить число $-5$; $a$; $-a$.
2. Обе части неравенства $4b<5$ умножить на число $\frac{1}{2}$; $3$; $-2$; $-\frac{1}{4}$.
3. Выполнить сложение неравенств:
   1) $a>3$ и $b>-2$; 2) $x<-4$ и $y<4$.
4. Выполнить умножение неравенств:
   1) $x>5$ и $y>3$; 2) $1<2$ и $0{,}5<2{,}5$.
5. Микроавтобус рассчитан на 13 посадочных мест. Могут ли в этом автобусе ехать сидя 5 пассажиров; 10 пассажиров; 13 пассажиров; 15 пассажиров?

## Упражнения

**75.** Найти наибольшее целое число $n$, удовлетворяющее неравенству:

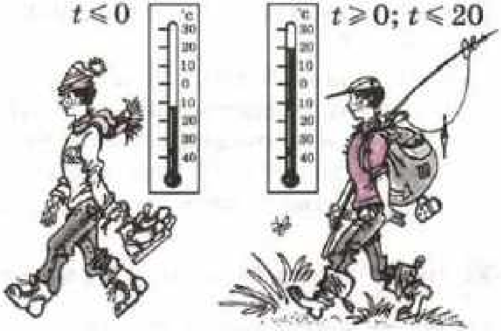
1) $n \leqslant -2$; 2) $n \leqslant 3$; 3) $n<4$;
4) $n<-5$; 5) $n \leqslant 0{,}2$; 6) $n \leqslant -0{,}3$.

**76.** Найти наименьшее целое число $n$, удовлетворяющее неравенству:

1) $n \geqslant -3$; 2) $n \geqslant 6$; 3) $n>6$;
4) $n>-4$; 5) $n>-4{,}21$; 6) $n \geqslant 3{,}24$.

**77.** Найти наибольшее целое число $x$, удовлетворяющее неравенству:

1) $\frac{x}{6} \leqslant 1$; 2) $\frac{x}{4} < -2$.




**78.** Записать, используя знаки неравенства, утверждения:

1) сегодня в Москве 0 °C, а в Санкт-Петербурге температура ($t$ °C) не выше, чем в Москве;

2) вода поднялась на высоту ($h$ м), не меньшую 5 м;

3) температура ($t$ °C) воды в жидком состоянии при нормальном давлении не меньше 0 °C; не больше 100 °C;

4) скорость ($v$ км/ч) движения автомобильного транспорта в городе не больше 60 км/ч.

**79.** Пусть $a \leqslant b$. Верно ли неравенство:

1) $a-3 \leqslant b-3$; 2) $5a \leqslant 5b$; 3) $a+2{,}5 < b+2{,}5$; 4) $a-4 > b-4$?

**80.** Пусть $a \geqslant b$. Верно ли неравенство:

1) $-2a > -2b$; 2) $-3a \leqslant -3b$; 3) $\frac{a}{12} \geqslant \frac{b}{12}$; 4) $\frac{a}{15} < \frac{b}{15}$?

**81.** Доказать, что:

1) если $a-b \geqslant 4a+5b$, то $a \leqslant -2b$;

2) если $a-2b \leqslant 5a+4b$, то $2a \geqslant -3b$;

3) если $(x+2)(x-3) \leqslant (x+3)(x-2)$, то $x \geqslant 0$;

4) если $(x-5)(x+1) \geqslant (x+5)(x-1)$, то $x \leqslant 0$.

**82.** Доказать, что при всех значениях $x$ верно неравенство:

1) $(x-1)(x+3) \leqslant (x+1)^2$; 2) $(x+2)^2 \geqslant (x+1)(x+3)$.

**83.** Доказать, что:

1) $4x^2+1 \geqslant 4x$ при любом $x$; 2) $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$ при $a>0$;

3) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$, если $ab>0$; 4) $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$, если $a \geqslant b$ и $ab>0$;

5) $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$, если $a \geqslant b$ и $ab<0$; 6) $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$, если $a+b=1$.

Диалог об истории

## Знаки нестрогих неравенств

Профессор, Вы знаете, что я всегда интересуюсь историей возникновения новых символов и знаков. Расскажите, пожалуйста, когда и кем были изобретены знаки нестрогих неравенств.

Первоначально знаки нестрогих неравенств записывались так: $\geqq$ (не меньше) и $\leqq$ (не больше). Эти символы были введены в 1734 г. французским физиком *Пьером Бугером (1698—1758)* при написании работ по оптике. Позже эти знаки стали записывать так: $\geqslant$ и $\leqslant$, т. е. так, как мы записываем их сегодня. Нестрогие неравенства, описанные словами, без специальных символов, встречаются у многих древних учёных, например в X книге «Начал» Евклида.

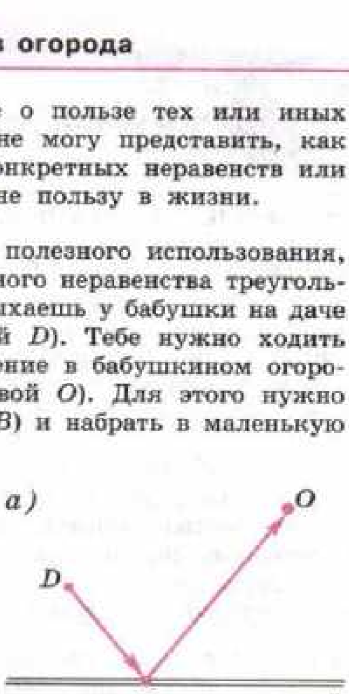
Это интересно

## Неравенство треугольника и полив огорода

Профессор, Вы часто говорите о пользе тех или иных знаний для практики. Но я не могу представить, как знание, например, каких-то конкретных неравенств или их свойств может принести мне пользу в жизни.

Давай я приведу тебе пример полезного использования, например, хорошо всем известного неравенства треугольника. Допустим, ты летом отдыхаешь у бабушки на даче (на рисунке *а* дачу обозначим буквой $D$). Тебе нужно ходить каждый день поливать любимое растение в бабушкином огороде (на рисунке огород обозначен буквой $O$). Для этого нужно подойти к ручью (к некоторой точке $B$) и набрать в маленькую лейку воды. Конечно, ты захочешь, чтобы твой путь (т. е. сумма длин отрезков $DB$ и $BO$) был самым коротким. Где же с этой целью выбрать на берегу ручья точку $B$?

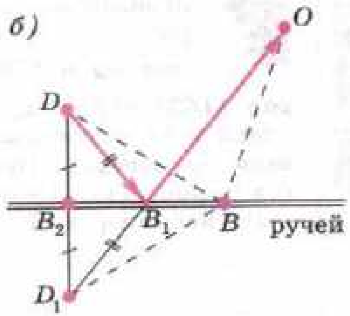
а)




Если лейка с водой лёгкая, то я бы пошла по самой короткой дороге к ручью, а от неё — по прямой к точке $O$.

Я подскажу, как найти точку $B$, чтобы расстояние $DB + BO$ было наименьшим. А ты потом сравнишь найденное расстояние с длиной предложенного тобой маршрута.

Построим точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно линии берега ручья (рис. *б*). Очевидно, где бы мы ни взяли на берегу точку $B$, отрезки $DB$ и $D_1B$ будут равными, и поэтому запланированный путь $DB + BO$ будет таким же, как путь $D_1B + BO$. Рассматривая треугольник $D_1BO$, мы с помощью неравенства треугольника делаем заключение: $D_1O < D_1B + BO$. Значит, самый короткий путь и будет $DB_1 + B_1O$, который равен $D_1O$ (точка $B_1$ — точка пересечения отрезка $D_1O$ с линией берега ручья).




Я предлагала маршрут $DB_2 + B_2O$, а он явно длиннее, чем $D_1O$.

## § 6 Неравенства с одним неизвестным

Вы знаете, что для решения ряда прикладных задач приходится составлять математическую модель в виде уравнения или системы уравнений. В этом параграфе вы узнаете, что математическими моделями для решения многих задач являются неравенства с неизвестными. Будет введено понятие решения неравенства и показано, как проверить, является ли данное число решением конкретного неравенства.

**Нужно вспомнить:**

- понятия уравнения и корня уравнения;
- что значит решить уравнение;
- нахождение координат точек, построенных на координатной плоскости;
- построение графика линейной функции.

**Задача.** Из двух городов отправляются одновременно навстречу друг другу два поезда с одинаковыми постоянными скоростями. С какой скоростью должны двигаться поезда, чтобы через 2 ч после начала движения сумма расстояний, пройденных ими, была не менее 200 км?

Пусть $x$ километров в час — искомая скорость движения поездов. За 2 ч каждый из поездов пройдёт путь $2x$ километров.

По условию задачи сумма расстояний, пройденных поездами за 2 ч, должна быть не меньше 200 км:

$$2x+2x \geqslant 200.$$

Отсюда $4x \geqslant 200$, $x \geqslant 50$.

Ответ. Скорость движения каждого поезда должна быть не меньше 50 км/ч. ◁

В неравенстве $4x \geqslant 200$ буквой $x$ обозначено неизвестное число. Это пример линейного неравенства с одним неизвестным.

Неравенства вида

$$ax>b,\ ax<b,\ ax \geqslant b,\ ax \leqslant b,$$

в которых $a$ и $b$ — заданные числа, а $x$ — неизвестное, называют **линейными неравенствами с одним неизвестным**.

Многие неравенства, например

$$4(3-x)>5+2x,\quad \frac{x-3}{2} \leqslant \frac{x-2}{3},\quad 1-\frac{x}{2}<3(x+4),$$

сводятся к линейным неравенствам.

Выражения, стоящие слева и справа от знака неравенства, называют соответственно **левой и правой частями неравенства**. Каждое слагаемое левой и правой частей неравенства называют **членом неравенства**.

Например, в неравенстве $2x-5 \geqslant 4+3x$ левая часть $2x-5$, правая часть $4+3x$; $2x$, $-5$, 4 и $3x$ — члены неравенства.

Если в неравенство $2x+2x \geqslant 200$, полученное в задаче, подставить $x=50$, $x=51$, $x=60$, то получатся верные числовые неравенства:

$$2 \cdot 50+2 \cdot 50 \geqslant 200;\ \ 2 \cdot 51+2 \cdot 51 \geqslant 200;$$
$$2 \cdot 60+2 \cdot 60 \geqslant 200.$$

Каждое из чисел 50, 51, 60 называют решением неравенства $2x+2x \geqslant 200$.

Определение. **Решением неравенства** с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

**Решить неравенство** — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Неизвестное число в неравенстве может быть обозначено любой буквой. Например, в неравенствах

$$3(y-5)<2(4-y),\ \ 2t-1\geqslant 4(t+3),$$

$$5-\frac{z}{2}>\frac{z}{3}-4$$

неизвестные обозначены соответственно буквами $y$, $t$, $z$.

### Устные вопросы и задания

1. Какие неравенства называются линейными неравенствами с одним неизвестным?
2. Назвать все члены неравенства $3x-8\leqslant 2$.
3. Что называют решением неравенства с одним неизвестным?
4. Что значит решить неравенство?
5. Привести примеры чисел, являющихся решениями неравенства $2x\leqslant 10$.
6. Привести примеры целочисленных решений неравенства $x<2{,}5$.
7. Назвать наибольшее целое решение неравенства $x<0{,}5$.
8. Назвать наименьшее целое решение неравенства $x>-6{,}4$.
9. Решить уравнение $3x-8=7$. Проверить, является ли корень этого уравнения решением неравенства $3x-8>7$; $3x-8<7$; $3x-8\geqslant 7$; $3x-8\leqslant 7$.

### Вводные упражнения

1. Является ли число 0 корнем уравнения:
   1) $3x-5=0$; 2) $7x^2+2x=0$; 3) $4x^2-x+5=0$.
2. Установить, какие из чисел $-1$; $0$; $2$ являются корнями уравнения:
   1) $x^2-x-2=0$; 2) $x^2+x=0$.
3. Решить уравнение:
   1) $5x-3=4x+7$; 2) $x^2-2x=0$; 3) $x^2-4=0$; 4) $x^2+4=0$.
4. Построить график функции:
   1) $y=3x$; 2) $y=-2x+3$.
5. Составить выражение для решения задачи:
   1) Миша шёл до школы 0,5 ч. С какой скоростью шёл мальчик, если расстояние до школы 2 км?
   2) Расстояние от дома до школы Саша прошёл со скоростью 4 км/ч за 0,3 ч. Каково расстояние от дома до школы?

## Упражнения

**84.** Записать в виде неравенства утверждение:

1) сумма чисел $x$ и 17 больше 18;
2) разность чисел 13 и $x$ меньше 2;
3) произведение чисел 17 и $x$ не меньше 3;
4) удвоенная сумма чисел $x$ и $-3$ не больше 2;
5) полусумма чисел $x$ и 3 не больше их произведения;
6) удвоенное произведение чисел $x$ и $-4$ не меньше их разности.

**85.** Какие из чисел 10, $\frac{1}{2}$, 0, $-1$, $-2$, $-5$ являются решениями неравенства:

1) $3x+4>2$;  2) $3x+4\leqslant x$;
3) $\frac{1}{2}x-3\geqslant 1-x$;  4) $3-x\geqslant \frac{1}{2}x$?

**86.** При каких значениях $y$ верно неравенство:

1) $-2y>0$;  2) $-3y<0$;  3) $y^2+1\geqslant 0$;
4) $2y^2+3\geqslant 0$;  5) $(y-1)^2\leqslant 0$;  6) $(y+2)^2>0$?

**87.** На рисунке 6 изображён график линейной функции $y=kx+b$. Записать, какие значения принимает $y$, если:

1) $x\geqslant 0$;  2) $x<0$;
3) $x>-5$;  4) $x\leqslant -5$.

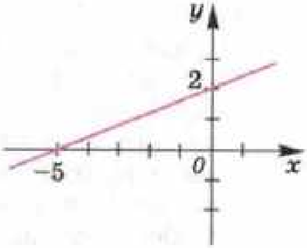


Рис. 6

**88.** На рисунке 7 изображён график линейной функции $y=kx+b$. Записать, при каких значениях $x$ значения функции:

1) положительны;
2) неотрицательны;
3) отрицательны;
4) меньше $-4$;
5) не меньше $-4$;
6) больше $-4$.

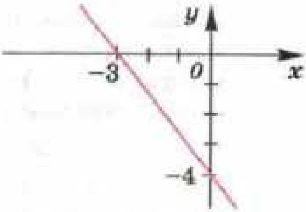


Рис. 7

**89.** С помощью графика функции найти, при каких значениях $x$ значения функции положительны, отрицательны, больше 1, меньше 1:

1) $y=2x+4$;  2) $y=3x-9$;
3) $y=-2x-8$;  4) $y=-3x+6$.

# § 7 Решение неравенств

Решение уравнений вы осуществляли путём приведения их к простейшим уравнениям. Аналогично при решении неравенств их стремятся с помощью свойств привести к виду простейших неравенств. В этом параграфе рассматриваются свойства неравенств, упрощающие их решение, а также формулируется алгоритм решения неравенств, сводящихся к линейным.

**Нужно вспомнить:**

- алгоритм решения линейного уравнения с одним неизвестным;
- свойства числовых неравенств;
- изображение рациональных чисел точками на числовой оси;
- понятие решения неравенства;
- что значит решить неравенство.

Решение неравенств с одним неизвестным, которые сводятся к линейным, основано на свойствах числовых неравенств, рассмотренных в § 3. Приведём примеры решения неравенств.

**Задача 1.** Решить неравенство $x+1>7-2x$.

▶ Предположим, что число $x_0$ является решением данного неравенства, т. е. неравенство $x_0+1>7-2x_0$ является верным. Перенесём член $-2x_0$ из правой части неравенства в левую, изменив его знак на противоположный, а число $+1$ перенесём в правую часть с противоположным знаком. В результате получим верное неравенство $x_0+2x_0>7-1$.

В обеих частях этого неравенства приведём подобные члены: $3x_0>6$.

Разделив обе части этого неравенства на 3, найдём $x_0>2$.

Предположив, что $x_0$ — решение исходного неравенства, мы получили, что $x_0>2$. Чтобы убедиться в том, что любое значение $x$, большее 2, является решением неравенства, достаточно провести все рассуждения в обратном порядке.

Пусть $x>2$. Применяя свойства верных числовых неравенств, последовательно получаем:

$$3x>6, \ x+2x>7-1, \ x+1>7-2x.$$

Следовательно, любое число $x$, большее 2, является решением данного неравенства.

Ответ. $x>2$. ◁

При записи решения неравенства можно не давать подробных объяснений. Например, решение задачи 1 можно записать так:

$$x+1>7-2x,$$
$$3x>6,$$
$$x>2.$$

Итак, при решении неравенств используются следующие **основные свойства**:

**Свойство 1** Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого члена на противоположный; при этом знак неравенства не меняется.

**Свойство 2** Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю; если это число положительно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный.

Эти свойства позволяют заменять данное неравенство другим, имеющим те же решения.

Для решения неравенства с одним неизвестным, которое сводится к линейному, нужно:

1) перенести члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1);
2) приведя подобные члены, разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

**Задача 2.** Решить неравенство $3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2$.

▶ Упростим левую и правую части неравенства. Раскроем скобки:

$$3x-6-4x-4<2x-6-2.$$

Перенесём члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1):

$$3x-4x-2x<6+4-6-2.$$

Приведём подобные члены: $-3x<2$ и разделим обе части на $-3$ (свойство 2): $x>-\frac{2}{3}$.

Ответ. $x>-\frac{2}{3}$. ◁

Это решение коротко можно записать так:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2,$$
$$3x-6-4x-4<2x-6-2,$$
$$-x-10<2x-8,$$
$$-3x<2,$$
$$x>-\frac{2}{3}.$$

Рис. 8

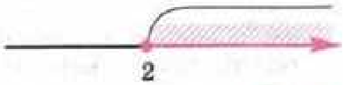


Рис. 9

Множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенству $x>-\frac{2}{3}$, на числовой оси изображается лучом (рис. 8). Точка $x=-\frac{2}{3}$ не принадлежит этому лучу, на рисунке 8 она изображена светлым кружком, а луч отмечен штриховкой. Множество чисел $x$, удовлетворяющих, например, неравенству $x \geqslant 2$, называют **лучом**. Точка $x=2$ принадлежит этому лучу. На рисунке 9 эта точка изображена тёмным кружком.

**Задача 3.** Решить неравенство $\frac{x-5}{6}+1 \geqslant \frac{5x}{2}-\frac{x-3}{3}$.

▶ Умножим обе части неравенства на 6:

$$6 \cdot \frac{x-5}{6}+6 \cdot 1 \geqslant 6 \cdot \frac{5x}{2}-6 \cdot \frac{x-3}{3},$$
$$(x-5)+6 \geqslant 15x-2(x-3).$$

Раскроем скобки и приведём подобные члены:

$$x-5+6 \geqslant 15x-2x+6,$$
$$x+1 \geqslant 13x+6,$$

откуда $-12x \geqslant 5$, $x \leqslant -\frac{5}{12}$.

Ответ. $x \leqslant -\frac{5}{12}$. ◁

Множество решений этого неравенства, т. е. множество чисел $x \leqslant -\frac{5}{12}$, изображено на рисунке 10.

Рис. 10

В рассмотренных примерах неравенства после упрощения сводились к линейным, у которых коэффициент при неизвестном был не равен нулю. В некоторых случаях этот коэффициент может быть равен нулю.

Приведём примеры таких неравенств.

**Задача 4.** Решить неравенство $2(x+1)+5>3-(1-2x)$.

▶ Упростим обе части неравенства:

$$2x+2+5>3-1+2x,$$
$$2x+7>2+2x,$$

откуда

$$2x-2x>2-7,$$
$$0\cdot x>-5.$$

Последнее неравенство является верным при любом значении $x$, так как его левая часть при любом $x$ равна нулю, а $0>-5$. Следовательно, любое значение $x$ является решением данного неравенства.

Ответ. $x$ — любое число. ◁

**Задача 5.** Решить неравенство $3(2-x)-2>5-3x$.

▶ Упростим левую часть неравенства:

$$6-3x-2>5-3x,$$
$$4-3x>5-3x,$$

откуда

$$-3x+3x>5-4,$$
$$0\cdot x>1.$$

Последнее неравенство не имеет решений, так как левая часть неравенства при любом значении $x$ равна нулю, а неравенство $0>1$ неверно.

Следовательно, исходное неравенство не имеет решений.

Ответ. Решений нет. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Сформулировать свойства неравенств, применяемые при их решении.
2. Привести пример применения к неравенству свойства 1.
3. Привести пример применения к неравенству свойства 2.
4. Сформулировать алгоритм решения неравенств.
5. Как называется множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x>a$; $x\leqslant b$ ($a$ и $b$ — некоторые числа)?
6. Привести пример линейного неравенства с одним неизвестным, не имеющего решений.

## Вводные упражнения

**1.** Показать, что число $-7$ является решением неравенства:

1) $\frac{1}{7}x - 2 < -1$; 2) $-\frac{3}{7}y + 2 \geqslant 5$.

**2.** Дано верное числовое неравенство $3 > \frac{1}{2}$.

1) Умножить обе части неравенства на число 2; $-\frac{2}{3}$;

2) прибавить к обеим частям неравенства число $-4$; 1,5;

3) разделить обе части неравенства на число $-\frac{1}{3}$; 3.

**3.** Установить, при каких значениях $x$ верно неравенство:

1) $12x \leqslant 0$; 2) $9x > 0$; 3) $-5x < 0$; 4) $-6x \geqslant 0$;

5) $3x^2 + 1 > 0$; 6) $7x^2 + 5 \geqslant 0$; 7) $(x-8)^2 > 0$; 8) $(3+x)^2 \leqslant 0$.

**4.** Решить уравнение:

1) $3x + 2 = -x$; 2) $3(x+2) = -2x$.

**5.** На рисунке 11 изображён график функции $y = 3x - 1$. С помощью рисунка решить неравенство:

1) $3x - 1 > 0$; 2) $3x - 1 \leqslant 0$.

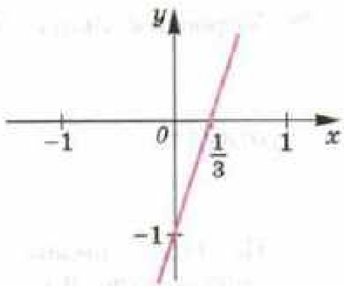



Рис. 11

## Упражнения

Решить неравенство (90—91).

**90.** 1) $x + 2 \geqslant 15$; 2) $x - 6 < 8$; 3) $3 \leqslant y + 6$;

4) $-4 > 5 - y$; 5) $2z \geqslant z - 7$; 6) $3z \leqslant 2z + 4$.

**91.** 1) $12x > -36$; 2) $-7x \leqslant 56$; 3) $\frac{y}{4} \leqslant 7$;

4) $-5 < \frac{z}{3}$; 5) $7{,}2z > -27$; 6) $-4{,}5x \geqslant 9$.

Решить неравенство и изобразить множество его решений на числовой оси (92—93).

**92.** 1) $2x - 16 > 0$; 2) $18 - 3x > 0$; 3) $3x - 15 < 0$;

4) $25 - 5x < 0$; 5) $9 - 3x \geqslant 0$; 6) $2x + 4 \leqslant 0$.

**93.** 1) $3(x+1) \leqslant x + 5$; 2) $4(x-1) \geqslant 5 + x$;

3) $2(x-3) + 4 < x - 2$; 4) $x + 2 < 3(x+2) - 4$;

5) $\frac{x-1}{3} \geqslant \frac{2x-3}{5}$; 6) $\frac{3x-2}{4} \geqslant \frac{2x-1}{3}$.

**94.** Выяснить, при каких значениях $x$ выражение принимает положительные значения:

1) $\frac{3}{8}x+4$; 2) $\frac{5}{2}-4x$; 3) $2(x+3)+3x$;

4) $3(x-5)-8x$; 5) $\frac{1}{3}-2(x+4)$; 6) $\frac{1}{2}-3(x-5)$.

**95.** Выяснить, при каких значениях $y$ выражение принимает отрицательные значения:

1) $5-\frac{2}{3}y$; 2) $\frac{3}{4}-2y$; 3) $\frac{y-2}{3}+\frac{1}{3}$;

4) $\frac{8y-3}{5}-\frac{2}{5}$; 5) $\frac{3y-5}{2}-\frac{y}{2}$; 6) $\frac{4-5y}{6}-\frac{y}{6}$.

**96.** Найти наименьшее целое число, являющееся решением неравенства:

1) $4(y-1)<2+7y$; 2) $4y-9>3(y-2)$;

3) $3(x-2)-2x<4x+1$; 4) $6x+1\geqslant 2(x-1)-3x$.

**97.** Найти наибольшее целое число, являющееся решением неравенства:

1) $5-2x>0$; 2) $6x+5\leqslant 0$;

3) $3(1-x)>2(2-x)$; 4) $4(2-x)<5(1-x)$.

Решить неравенство **(98—99)**.

**98.** 1) $\frac{3x}{2}-\frac{3}{5}<4x+3$; 2) $\frac{x}{5}-5>1\frac{3}{4}-\frac{5x}{2}$;

3) $\frac{4-3y}{2}-\frac{8y+1}{6}<15y-6$; 4) $8+\frac{3y-2}{4}>\frac{y-1}{6}-\frac{5y+4}{3}$.

**99.** 1) $\frac{x+1}{2}-2x\leqslant\frac{x-2}{3}+\frac{x}{2}$; 2) $\frac{x-4}{3}+3x\geqslant\frac{x}{3}-\frac{x+1}{4}$;

3) $\frac{2x-1}{2}-\frac{2x}{5}>\frac{3x-2}{5}-\frac{x}{4}$; 4) $\frac{3x+1}{4}-\frac{x}{2}<\frac{5x-2}{3}+\frac{3x}{5}$.

**100.** 1) При каких $a$ значение дроби $\frac{a}{3}$ больше значения дроби $\frac{a+1}{4}$?

2) При каких $b$ значение дроби $\frac{b+3}{2}$ меньше значения дроби $\frac{b-1}{5}$?

3) При каких $x$ значение дроби $\frac{3x-5}{6}$ больше значения разности дробей $\frac{6x-7}{15}$ и $\frac{3-x}{9}$?

Решить неравенство (101—104).

**101.** 1) $3(x-2)+x<4x+1$; 2) $5(x+2)-x>3(x-1)+x$;

3) $\frac{3x+6}{4}-\frac{x}{4}>\frac{x+2}{2}$; 4) $\frac{2x-1}{5}-4<x-\frac{3x+1}{5}$;

5) $5x+1\geqslant 2(x-1)+3x+3$; 6) $\frac{x+4}{2}-x\leqslant 2-\frac{x}{2}$.

**102.** 1) $5(x+2)+2(x-3)<3(x-1)+4x$;

2) $3(2x-1)+3(x-1)>5(x+2)+2(2x-3)$;

3) $\frac{5x+3}{2}-1\geqslant 3x-\frac{x-7}{2}$; 4) $2-\frac{x-4}{3}\leqslant 2x-\frac{7x-4}{3}$.

**103.** 1) $(x-1)^2+7>(x+4)^2$;

2) $(1+x)^2+3x^2<(2x-1)^2+7$;

3) $(x+3)(x-2)\geqslant(x+2)(x-3)$;

4) $(x+1)(x-4)+4\geqslant(x+2)(x-3)-x$.

**104.** 1) $\frac{2}{3x+6}<0$; 2) $\frac{3}{2x-4}>0$; 3) $\frac{-1,7}{0,5x-2}>0$;

4) $\frac{-2,3}{0,4x+8}<0$; 5) $\frac{-1,7}{2,1+6,3x}<0$; 6) $\frac{-3,8}{3,2-6,4x}>0$.

**105.** При каких $x$ значения функции $y=2,5x-4$:

1) положительны; 2) отрицательны;

3) больше 1; 4) меньше $-4$?

**106.** При каких $x$ значения функции $y=3,5-0,5x$:

1) положительны; 2) неотрицательны;

3) не больше 3,5; 4) не меньше 1?

**107.** Построить график функции $y=3-2x$. С помощью графика найти значения $x$, при которых точки графика лежат:

1) выше оси абсцисс; 2) выше прямой $y=2$;

3) ниже оси абсцисс; 4) ниже прямой $y=4$.

Результаты проверить, составляя и решая соответствующие неравенства.

**108.** Сколько железнодорожных платформ потребуется для перевозки 183 контейнеров, если на одной платформе можно разместить не более 5 контейнеров?

**109.** Рабочий по плану должен изготовить 40 деталей. Сколько деталей он должен изготовить, чтобы перевыполнить план более чем на 7%?

**110.** Одна сторона треугольника равна 8 см, а другая — 13 см.
1) Каким наименьшим целым числом сантиметров может быть длина третьей стороны?
2) Каким наибольшим целым числом сантиметров может быть длина третьей стороны?

**111.** Сумма нечётного числа с тремя последующими нечётными числами больше 49. Найти наименьшее нечётное число, удовлетворяющее этому условию.

**112.** Сумма чётного числа с утроенным последующим чётным числом меньше 69. Найти наибольшее чётное число, удовлетворяющее этому условию.

**113.** Из двух пунктов, находящихся на расстоянии 60 км, отправляются одновременно навстречу друг другу пешеход и велосипедист с постоянными скоростями. Скорость движения пешехода равна 4 км/ч. С какой скоростью должен двигаться велосипедист, чтобы его встреча с пешеходом произошла не позже чем через 3 ч после начала движения?

**114.** На соревнованиях велосипедисты должны проехать 155 км. Велосипедисты стартуют поочерёдно с интервалом 5 мин, и каждый из них едет с постоянной скоростью. Скорость первого велосипедиста равна 30 км/ч. С какой скоростью должен двигаться третий велосипедист, чтобы прибыть к финишу раньше первого?

**115.** При каких значениях $x$ точки графика функции $y=3x+4{,}5$ лежат выше точек графика функции $y=-2x+1$?

**116.** При каких значениях $x$ точки графика функции $y=5x-4$ лежат ниже точек графика функции $y=0{,}5x+5$?

**117.** На какое наименьшее целое число сантиметров нужно увеличить длину окружности, чтобы её радиус увеличился более чем на 10 см? (Длина $c$ окружности радиуса $R$ находится по формуле: $c=2\pi R$, где $\pi=3{,}14...$ .)

Шаг вперёд

**Неравенства с параметрами**

При знакомстве с системами линейных уравнений я рассказал вам о задачах с *параметрами* и показал, как решаются уравнения с параметрами.

Я могу привести пример уравнения с параметром: $ax=5$, где $x$ — неизвестное, а число $a$ — параметр. Помню, что если ставится задача решения уравнения с параметром, то нужно рассмотреть все случаи, когда уравнение имеет корни и когда не имеет корней. Уравнение, которое я придумала, при $a \neq 0$ имеет один корень $\left(x = \frac{5}{a}\right)$, а при $a = 0$ уравнение не имеет корней. Бесконечно много корней это уравнение ни при каком $a$ иметь не будет. А вот, например, для уравнения $ax = 0$ при $a = 0$ корнем будет любое число.

Думаю, что решать линейные неравенства с параметрами ненамного труднее, чем уравнения...

Вообще решать неравенства труднее, чем решать уравнения того же класса. Тем более неравенства с параметрами. Скажи, пожалуйста, как решить, например, неравенство $ax > 0$?

Рассуждаю так: параметр $a$ может принимать разные значения и в зависимости от этого мне нужно находить $x$. Если $a = 0$, то неравенство не имеет решений, так как тогда при любом $x$ произведение $ax = 0$. При $a > 0$ неизвестное $x$ должно быть положительным, а при $a < 0$ — отрицательным. Верно?

Ты абсолютно верно решил одно из самых простых неравенств с параметром. Теперь я покажу вам решение более сложного неравенства $4 + 3ax > 12x + a$ с параметром $a$.

► Преобразуем это неравенство к удобному для анализа виду:

$$3ax - 12x + 4 - a > 0,\ 3x(a - 4) - (a - 4) > 0,\ (a - 4)(3x - 1) > 0.$$

1) Если $a - 4 = 0$, т. е. $a = 4$, неравенство примет вид $0 \cdot (3x - 1) > 0$. Это неравенство не имеет решений.

2) Если $a - 4 > 0$, то, разделив обе части неравенства на положительное число $a - 4$, получим неравенство того же знака, что и исходное, т. е. $3x - 1 > 0$, откуда $x > \frac{1}{3}$.

3) Если $a - 4 < 0$, то деление обеих частей неравенства на отрицательное число $a - 4$ даёт в результате неравенство противоположного знака, т. е. $3x - 1 < 0$, откуда $x < \frac{1}{3}$.

Ответ. Если $a = 4$, то неравенство не имеет решений; если $a > 4$, то $x > \frac{1}{3}$; если $a < 4$, то $x < \frac{1}{3}$. ◁

Теперь попробуйте самостоятельно решить относительно $x$ следующие неравенства:

1) $ax < 4$; 2) $3ax > 1$; 3) $2ax - 4 > x$;
4) $3ax + 3 < x + 5$; 5) $ax - a^2 \geqslant x - 1$; 6) $ax + 9 \leqslant 3x + a^2$.

Для самоконтроля дам ответ, например, к 5 заданию: если $a > 1$, то $x \geqslant a + 1$; если $a < 1$, то $x \leqslant a + 1$; если $a = 1$, то $x$ — любое число.

# § 8 Системы неравенств с одним неизвестным. Числовые промежутки

С понятием системы вы познакомились в 7 классе и научились решать системы линейных уравнений с двумя неизвестными. В этом параграфе будут рассмотрены системы линейных неравенств с одним неизвестным. Множества решений систем неравенств могут записываться с помощью промежутков (интервалов, полуинтервалов, отрезков, лучей). С обозначениями числовых промежутков вы познакомитесь в этом параграфе.

**Нужно вспомнить:**

- свойства неравенств;
- алгоритм решения линейных неравенств с одним неизвестным;
- понятие решения неравенства;
- понятия луча и отрезка;
- алгоритм построения графика линейной функции;
- понятие системы уравнений.

## 1. Системы неравенств.

**Задача.** В пустой бассейн вместимостью 4000 л начали наливать воду. Сколько литров воды в час нужно наливать в бассейн, чтобы через 4 ч было заполнено более половины всего бассейна и чтобы через 5 ч бассейн не переполнился?

▶ Пусть $x$ литров — количество воды, поступающей в бассейн за 1 ч. По условию задачи $4x > 2000$, $5x \leqslant 4000$. Из первого неравенства получим $x > 500$, а из второго $x \leqslant 800$.

Ответ. За час нужно вливать в бассейн больше 500 л воды, но не больше 800 л воды. ◁

В неравенствах $4x > 2000$ и $5x \leqslant 4000$ неизвестное число $x$ одно и то же. Поэтому эти неравенства рассматривают совместно и говорят, что они образуют **систему неравенств**:

$$\begin{cases} 4x > 2000, \\ 5x \leqslant 4000. \end{cases} \qquad (1)$$

Фигурная скобка показывает, что нужно найти такие значения $x$, при которых оба неравенства системы (1) обращаются в верные числовые неравенства.

Система (1) — пример **системы линейных неравенств с одним неизвестным**.

Приведём ещё примеры систем неравенств с одним неизвестным, сводящихся к системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} 3(x+1) > 5, \\ 4(x-1) > x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \geqslant 3x, \\ 5(x-1) \leqslant 8. \end{cases}$$

**Решением системы неравенств с одним неизвестным** называется то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

**Решить систему неравенств** — это значит найти все решения этой системы или установить, что их нет.

Например, $x=1$ является решением системы

$$\begin{cases} 2x \geqslant -4, \\ 3x \leqslant 9, \end{cases} \qquad (2)$$

так как при $x=1$ оба неравенства системы (2) верны:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 \geqslant -4, \\ 3 \cdot 1 \leqslant 9. \end{cases}$$

Разделив обе части первого неравенства системы (2) на 2, а второго — на 3, получим:

$$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$$

Следовательно, решениями системы (2) являются все значения $x$, которые не меньше $-2$ и не больше 3.

**Неравенства $x \geqslant -2$ и $x \leqslant 3$ можно записать в виде двойного неравенства: $-2 \leqslant x \leqslant 3$.**

## 2. Числовые промежутки.

Решениями систем неравенств с одним неизвестным являются различные числовые множества. Эти множества имеют названия.

Так, на числовой оси множество чисел $x$, таких, что $-2 \leqslant x \leqslant 3$, изображается отрезком с концами в точках $-2$ и 3 (рис. 12).

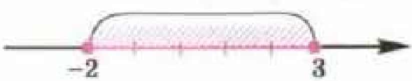


Рис. 12

Поэтому множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенствам $-2 \leqslant x \leqslant 3$, называют отрезком и обозначают $[-2; 3]$.

Если $a < b$, то множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется **отрезком** и обозначается $[a; b]$.

Рис. 13

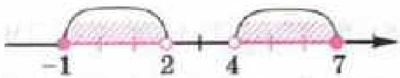


Рис. 14

Например, отрезок [4; 7] — это множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенствам $4 \leqslant x \leqslant 7$. Для множеств чисел, удовлетворяющих неравенствам вида $2 < x < 7$, $-1 \leqslant x < 2$, $4 < x \leqslant 7$, также вводятся специальные названия.

Если $a < b$, то множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется **интервалом** и обозначается $(a; b)$.

Например, интервал (–2; 3) — это множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенствам $-2 < x < 3$ (рис. 13).

Множества чисел $x$, удовлетворяющих неравенствам вида $x > a$ и $x < a$, также называют интервалами.

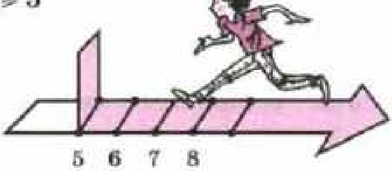
Множества чисел $x$, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, называются **полуинтервалами** и обозначаются соответственно $[a; b)$ и $(a; b]$.

Например, полуинтервал [–1; 2) — это множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x < 2$; полуинтервал (4; 7] — множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенствам $4 < x \leqslant 7$ (рис. 14).

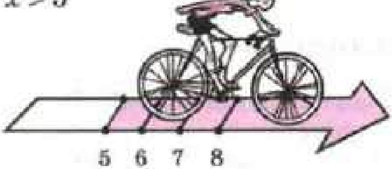
Отрезки, интервалы, полуинтервалы и лучи называют **числовыми промежутками**.

Таким образом, числовые промежутки можно задавать в виде неравенств.

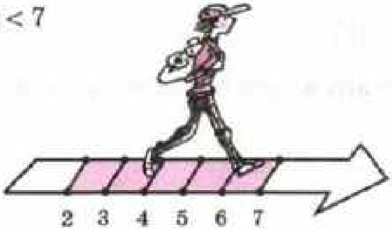
$x \geqslant 5$



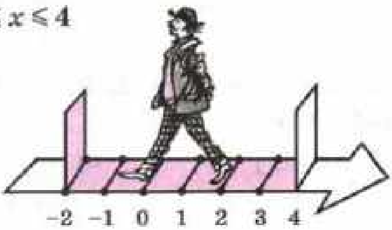

$x > 5$




$2 < x < 7$




$-2 \leqslant x \leqslant 4$



## Устные вопросы и задания

1. Что называют решением системы неравенств с одним неизвестным?
2. Что значит решить систему неравенств?
3. Привести пример двойного неравенства и перечислить неравенства, записанные с его помощью.
4. Как называется множество чисел, удовлетворяющее неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, где $a < b$? Как обозначается такое множество?
5. Какое множество чисел называют интервалом; полуинтервалом?
6. Каким общим термином называют отрезки, интервалы, полуинтервалы, лучи?
7. Привести пример отрезка; интервала; полуинтервала; луча.

## Вводные упражнения

1. Решить неравенство:
   1) $5x - 7 \geqslant 2x + 1$; 2) $-8x + 6 < 2x - 1$.
2. На числовой оси изобразить множество решений неравенства:
   1) $4x - 12 < 0$; 2) $3 - 2x \geqslant 0$.
3. Не строя графика функции $y = \frac{1}{2}x - 3$, определить, при каких значениях $x$ её значения положительны; не положительны.
4. Изобразить на числовой оси множество решений неравенства $x > 2$; $x \leqslant 4$.

## Упражнения

**118.** Какие из чисел $-3$; 10; 12 являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 5 - x \leqslant 9, \\ 2 - 3x > -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 > 1, \\ 5 - 2x > -25? \end{cases}$

**119.** Какие из чисел $-2$; 0; 1; 2 являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 12x - 1 < 11, \\ -3 - x \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 1 \geqslant 4 - x, \\ x + 6 > 2? \end{cases}$

**120.** Найти все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x > -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leqslant 2{,}7, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geqslant -5{,}1, \\ x < 5{,}1. \end{cases}$

**121.** Множество чисел $x$, удовлетворяющих данному двойному неравенству, записать с помощью обозначений числового промежутка и изобразить его на числовой оси:

1) $1 \leqslant x \leqslant 5$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $-1 < x < 4$;
4) $1 < x < 2$; 5) $-3 \leqslant x < 1$; 6) $-4 < x \leqslant -2$.

**122.** Множество чисел $x$, принадлежащих данному числовому промежутку, записать в виде двойного неравенства и изобразить его на числовой оси:

1) $[-4;\ 0]$; 2) $[-3;\ -1]$; 3) $(-4;\ -2)$;
4) $(0;\ 3)$; 5) $(-1;\ 4]$; 6) $[-2;\ 2)$.

**123.** Записать в виде двойного неравенства, а также с помощью обозначений числового промежутка множество чисел $x$, изображённое на рисунке 15.

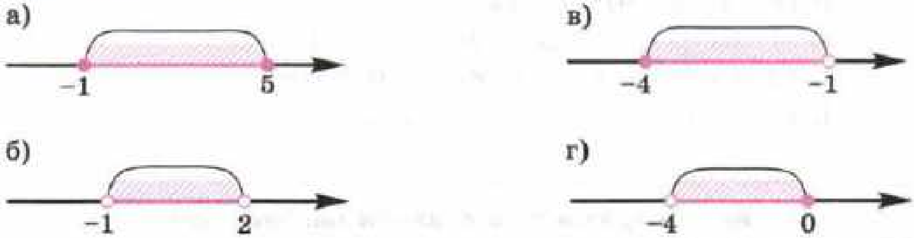



Рис. 15

**124.** Имеют ли общие точки отрезок $[2;\ 3]$ и интервал $(1;\ 4)$?

**125.** Имеют ли общие точки отрезки $[2;\ 4]$ и $[3;\ 5]$?

**126.** На одной координатной плоскости построить графики функций $y = -2x - 2$ и $y = 2 - \frac{x}{2}$. Отметить на оси абсцисс множество значений $x$, при которых значения обеих функций:

1) положительны; 2) отрицательны.

**127.** На одной координатной плоскости изображены графики двух линейных функций (рис. 16). Указать значения $x$ (если они существуют), при которых значения обеих функций одновременно положительны; отрицательны.

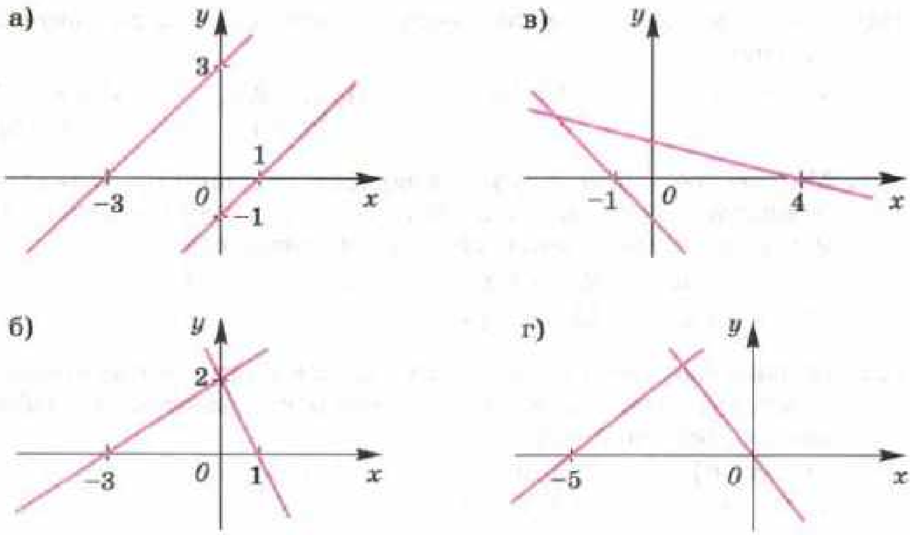



Рис. 16

**128.** Решить неравенство:

1) $(x-3)(2x-3)+6x^2 \leqslant 2(2x-3)^2$;

2) $(5-6x)(1+3x)+(1+3x)^2 \leqslant (1+3x)(1-3x)$;

3) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-8x^3 \geqslant -2(x+3)$;

4) $(x-2)(x^2+2x+4) \leqslant x(x^2+2)+1$.

Шаг вперёд

## Линейные неравенства с двумя неизвестными и их системы

Профессор, с решением неравенств, содержащих одно неизвестное, мы уже знакомы. А как решаются неравенства с двумя неизвестными? Что, например, будет решением неравенства $x \geqslant y$?

Вообще *решением неравенства с двумя неизвестными называется пара чисел* $(x; y)$, *обращающая данное неравенство в верное числовое неравенство. Решить неравенство — это значит найти множество всех его решений.* Так, решениями неравенства $x \geqslant y$ будут, например, пары чисел $(5; 3)$, $(-1; -1)$, так как $5 \geqslant 3$ и $-1 \geqslant -1$.

Но как найти множество всех решений неравенства $x \geqslant y$ (ведь пар чисел, у которых первое число не меньше второго, бесконечно много)?

Аналогично тому, как мы изображаем штриховкой на координатной прямой множество всех решений неравенства с одним неизвестным, множество решений неравенства с двумя неизвестными можно тоже изобразить штриховкой, но уже на координатной плоскости.

Неравенство $x \geqslant y$, которое можно записать и в виде $y \leqslant x$, имеет в качестве решения множество пар чисел — координат точек плоскости, отмеченных на рисунке *а* в виде заштрихованной полуплоскости вместе с её границей (графиком функции $y = x$).

Действительно, для любой точки $A(x_1;\ y_1)$ этой полуплоскости $y_1 \leqslant x_1$ (для точек её границы $y = x$). Для любой же точки $B(x_2;\ y_2)$, не принадлежащей заштрихованной полуплоскости, $y_2 > x_2$, т. е. решениями неравенства являются только все точки заштрихованной полуплоскости рисунка *а* (с её границей).

Покажите, пожалуйста, как решаются более сложные неравенства с двумя неизвестными.

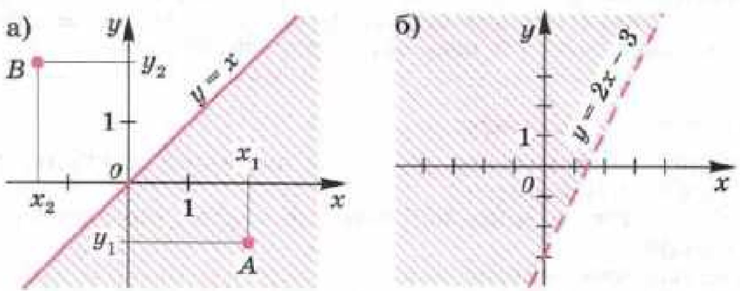
Решим вместе неравенство $2x - y < 3$. Запишем данное неравенство в виде $y > 2x - 3$. На рисунке *б* штриховой линией изображён график функции $y = 2x - 3$, а штриховкой — решение неравенства $y > 2x - 3$ (полуплоскость над прямой $y = 2x - 3$ без её границы).

Наверное, теперь мы сможем решать системы неравенств с двумя неизвестными?

Точнее, сможете изображать решения систем неравенств штриховкой на координатной плоскости. Определим сначала, что же называется решением системы неравенств с двумя неизвестными.

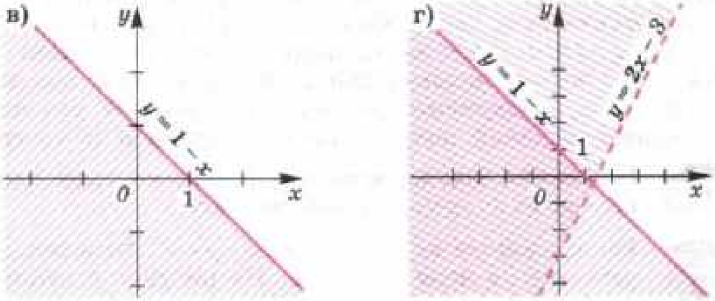
***Решением системы неравенств с двумя неизвестными называется пара чисел $(x;\ y)$, обращающая каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.***

Решим систему неравенств $\begin{cases} y > 2x - 3, \\ y \leqslant 1 - x. \end{cases}$



Решение неравенства $y > 2x - 3$ изображено на рисунке *б*. Решение неравенства $y \leqslant 1 - x$ — на рисунке *в*.

Все решения системы неравенств можно изобразить с помощью части координатной плоскости, в которой пересекаются штриховки (рис. *г*), изображающие решение каждого из неравенств системы в отдельности. Действительно, координаты точек $(x;\ y)$ этой части плоскости являются парами чисел — решениями как первого, так и второго неравенства системы.




Теперь самостоятельно изобразите на координатной плоскости решение системы неравенств:

1) $\begin{cases} y < 2 - x, \\ y \geqslant 3x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y \leqslant 3, \\ 2x + 4y - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

## § 9 Решение систем неравенств

Решать линейные неравенства с одним неизвестным вы уже научились. Знаете, что такое система неравенств и решение системы. Поэтому процесс решения систем неравенств с одним неизвестным не вызовет у вас затруднений.

**Нужно вспомнить:**

- понятия системы неравенств и решения системы неравенств с одним неизвестным;
- изображение на числовой оси числовых промежутков и их обозначения;
- свойства неравенств;
- действия с многочленами и алгебраическими дробями.

Рассмотрим примеры решения систем неравенств.

**Задача 1.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x-1>3(x+1), \\ 2(x+4)>x+5. \end{cases}$$

► Решим первое неравенство:

$$5x-1>3x+3, \;\; 2x>4, \;\; x>2.$$

Итак, первое неравенство выполняется при $x>2$.

Решим второе неравенство:

$$2x+8>x+5, \;\; x>-3.$$

Итак, второе неравенство системы выполняется при $x>-3$.

Изобразим на числовой оси множества решений первого и второго неравенств системы.

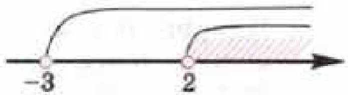


Рис. 17

Решения первого неравенства — интервал $x>2$, решения второго неравенства — интервал $x>-3$ (рис. 17). Решениями системы являются такие значения $x$, которые одновременно принадлежат обоим интервалам. Из рисунка видно, что множество всех общих точек этих интервалов — интервал $x>2$.

Ответ. $x>2$. ◁

**Задача 2.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3(x-1)\leqslant 2x+4, \\ 4x-3\geqslant 13. \end{cases}$$

► Решим первое неравенство:

$$3x-3\leqslant 2x+4, \;\; x\leqslant 7.$$

Решим второе неравенство системы:

$$4x\geqslant 16, \;\; x\geqslant 4.$$

Изобразим на числовой оси множества решений первого и второго неравенств системы. Решения первого неравенства — луч $x\leqslant 7$, решения второго неравенства — луч $x\geqslant 4$ (рис. 18). Из рисунка видно, что множество общих точек этих лучей — отрезок [4; 7].

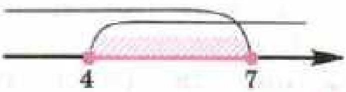


Рис. 18

Ответ. $4\leqslant x\leqslant 7$. ◁

**Задача 3.** Решить систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{5x}{12}+\dfrac{4}{3}\leqslant\dfrac{x+1}{3}, \\ 2-\dfrac{5x}{14}<\dfrac{2-x}{2}. \end{cases}$

▶ Решим первое неравенство системы:

$$5x+16\geqslant 4x+4,\ \ x\geqslant -12.$$

Решим второе неравенство:
$28-5x<14-7x,\ \ 2x<-14,\ \ x<-7.$

Изобразим на числовой оси промежутки $x\geqslant -12$ и $x<-7$ (рис. 19).

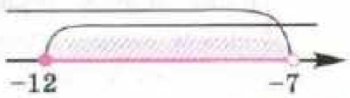



Рис. 19

Из рисунка видно, что множество общих точек этих промежутков — полуинтервал $[-12;\ -7)$.

Ответ. $-12\leqslant x<-7$. ◁

**Задача 4.** Показать, что система неравенств $\begin{cases} 2(1-x)<4-3x, \\ 10-3x<1 \end{cases}$ не имеет решений.

▶ Решим первое неравенство:

$$2-2x<4-3x,\ \ x<2.$$

Решим второе неравенство системы:

$$-3x<-9,\ \ x>3.$$

Изобразим на числовой оси интервалы $x<2$ и $x>3$ (рис. 20). Из рисунка видно, что эти интервалы не имеют общих точек. Следовательно, система не имеет решений. ◁


Рис. 20

## Устные вопросы и задания

1. Решением какой из систем $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x>4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x>3, \\ x\geqslant 4 \end{cases}$ является луч $x\geqslant 4$?
2. Привести пример системы, содержащей неравенство $x\leqslant 5$ и имеющей решением: 1) отрезок; 2) интервал; 3) полуинтервал; 4) луч.
3. Привести пример системы неравенств, не имеющей решений, если одно из неравенств системы $x\geqslant -2$.

## Вводные упражнения

**1.** Решить неравенство: 1) $3x+5>1-x$; 2) $5-2x\leqslant 4x-1$.

**2.** Изобразить на числовой оси множество решений неравенства:
1) $1\geqslant 3-x$; 2) $2-2x>7$.

**3.** Записать с помощью обозначений числовых промежутков и изобразить на числовой оси множество чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству:
1) $0\leqslant x<2$; 2) $-3<x\leqslant 1$; 3) $-1<x<4$; 4) $-2\leqslant x\leqslant 2$.

**4.** Найти наименьшее целое решение системы неравенств:
1) $\begin{cases} x<7, \\ x>-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\geqslant 3{,}5, \\ x>1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x>-1, \\ x>2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x<3, \\ x\geqslant -2. \end{cases}$

**5.** Найти наибольшее целое решение системы неравенств:
1) $\begin{cases} x\leqslant 5{,}3, \\ x<1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x<4{,}1, \\ x\leqslant 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\geqslant -3, \\ x<2{,}5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x>-4, \\ x\leqslant 1{,}3. \end{cases}$

## Упражнения

Записать множество решений системы неравенств одним неравенством и изобразить его на числовой оси (**129—130**).

**129.** 1) $\begin{cases} x>2, \\ x>5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>0, \\ x>-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x>2, \\ x\geqslant -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geqslant -2, \\ x\geqslant -4. \end{cases}$

**130.** 1) $\begin{cases} x\leqslant 1, \\ x<5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x<0, \\ x<-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<-2, \\ x<-5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\leqslant 1, \\ x\leqslant 0. \end{cases}$

Записать множество решений системы неравенств двойным неравенством и изобразить его на числовой оси (**131—132**).

**131.** 1) $\begin{cases} x>2, \\ x<5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>3, \\ x<6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<0, \\ x\geqslant -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x<\frac{1}{2}. \end{cases}$

**132.** 1) $\begin{cases} x\leqslant -2, \\ x\geqslant -7{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x<1{,}5, \\ x\geqslant -1{,}5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\geqslant 0{,}8, \\ x<2{,}2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\leqslant 7{,}5, \\ x\geqslant -0{,}5. \end{cases}$

Решить систему неравенств (**133—137**).

**133.** 1) $\begin{cases} 3x-18>0, \\ 4x>12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-14\geqslant 0, \\ 2x\geqslant 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+5>0, \\ 3x+6\geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+7\geqslant 0, \\ 5x+15>0. \end{cases}$

**134.** 1) $\begin{cases} 3-2x \geqslant 0, \\ 4x+8<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+4 \leqslant 0, \\ 4-3x>0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3 \leqslant 0, \\ 3x+9 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-9<0, \\ 12>3x. \end{cases}$

**135.** 1) $\begin{cases} 7-2x \geqslant 0, \\ 5x-20<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5 \leqslant 0, \\ 9x+18 \leqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6-2x>0, \\ 3x+6>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10-2x \geqslant 0, \\ 4x-8 \geqslant 0. \end{cases}$

**136.** 1) $\begin{cases} 3x+3 \leqslant 2x+1, \\ 3x-2 \leqslant 4x+2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+2 \geqslant 5x+3, \\ 2-3x<7-2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x+1)-x>2x+2, \\ 4(x+1)-2 \leqslant 2(2x+1)-x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x-1)-3<5(2x-1)-7x, \\ 3(x+1)-2 \leqslant 6(1-x)+7. \end{cases}$

**137.** 1) $\begin{cases} 5(x+1) \leqslant 3(x+3)+1, \\ \dfrac{2x-1}{7} \leqslant \dfrac{x+1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(2x+1)+x>3(x-1)+4, \\ \dfrac{2x-1}{3} \geqslant \dfrac{3x-2}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{6} \leqslant \dfrac{3x-1}{4}, \\ \dfrac{x+2}{3} > \dfrac{x+3}{5}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} \geqslant \dfrac{2x+7}{5}, \\ \dfrac{2x-3}{7} < \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{5}{21}. \end{cases}$

Решить систему неравенств (**138—140**).

**138.** 1) $\begin{cases} \dfrac{3-2x}{15} \leqslant \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x}{5}, \\ \dfrac{1-3x}{12} \geqslant \dfrac{5x-1}{3} - \dfrac{7x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{5x+7}{6} - \dfrac{3x}{4} < \dfrac{11x-7}{12}, \\ \dfrac{1-3x}{2} - \dfrac{1-4x}{3} \geqslant \dfrac{x}{6} - 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{6x-5}{3} - \dfrac{11}{5} < \dfrac{4x+3}{5} - 0{,}6, \\ \dfrac{8x+1}{2} - \dfrac{9x}{5} < \dfrac{6x-1}{5} + 0{,}1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{8x+1}{3} > \dfrac{4x+9}{2} - \dfrac{x-1}{3}, \\ \dfrac{5x-2}{3} < \dfrac{2x+13}{2} - \dfrac{x+2}{3}. \end{cases}$

**139.** 1) $\begin{cases} 2(4x-1)-3x<5(x+2)+7, \\ \dfrac{x-2}{3} \leqslant \dfrac{x-3}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3(x-1)}{2} - 1{,}3x \geqslant \dfrac{x}{5} - 1{,}5, \\ \dfrac{x-3}{5} < \dfrac{x+5}{3}. \end{cases}$

**140.** 1) $\begin{cases} 3(x+8) \geqslant 4(7-x), \\ (x+2)(x-5)>(x+3)(x-4); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2>x-2, \\ x+15>6-2x, \\ 5x+11 \leqslant x+23; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+3)(x-6) \leqslant (x+2)(x+1)+4, \\ 2(6x-1) \geqslant 7(2x-4); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-4<8x+6, \\ 2x-1>5x-4, \\ 11x-9 \leqslant 5x+3. \end{cases}$

**141.** Найти все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 0{,}2x > -1, \\ -\dfrac{x}{3} \geqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 0{,}5x \geqslant 0, \\ -\dfrac{x+5}{5} < -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{x}{3}, \\ \dfrac{x+1}{2} \geqslant \dfrac{x}{5}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} \leqslant \dfrac{x}{5}, \\ \dfrac{x}{3} > \dfrac{x+4}{7}. \end{cases}$

**142.** Указать значения $x$ (если они существуют), при которых значения функций $y = 0{,}5x + 2$ и $y = 3 - 3x$ одновременно:

1) положительны; 2) отрицательны;

3) больше 3; 4) меньше 3.

Ответ проиллюстрировать с помощью графиков данных функций, построенных на одной координатной плоскости.

**143.** При каких $x$ значения функций $y = x - 2$ и $y = 0{,}5x + 1$ одновременно:

1) неотрицательны; 2) неположительны;

3) не меньше 4; 4) не больше 4?

Ответ проиллюстрировать с помощью графиков данных функций, построенных на одной координатной плоскости.

**144.** Одна сторона треугольника равна 5 м, а другая — 8 м. Какой может быть третья сторона, если периметр треугольника: 1) меньше 22 м; 2) больше 17 м?

**145.** Если из $\frac{3}{2}$ целого числа вычесть $\frac{1}{4}$ его, то получится число, большее 29, а если из $\frac{3}{2}$ этого же числа вычесть $\frac{1}{3}$ его, то получится число, меньшее 29. Найти это целое число.

**146.** Если к удвоенному целому числу прибавить его половину, то получится число, меньшее 92, а если из удвоенного этого же целого числа вычесть его половину, то получится число, большее 53. Найти это целое число.

**147.** В раствор объёмом 8 л, содержащий 60% кислоты, начали вливать раствор, содержащий 20% кислоты. Сколько можно влить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала кислоты не больше 40%, но не меньше 30%?

**148.** Для получения крахмала берут рис и ячмень, причём ячменя берут в 4 раза больше, чем риса. Сколько килограммов риса и ячменя нужно взять, чтобы получить больше 63 кг, но не больше 126 кг крахмала, если рис содержит 75% крахмала, а ячмень — 60%?

## Решение двойного неравенства

Смогли бы вы решить, например, такое двойное неравенство:

$$-4 \leqslant 2x - 3 \leqslant 3?$$

Я знаю, что с помощью двойного неравенства записывают фактически два неравенства, образующие систему. В данном случае двойное неравенство можно записать в виде системы

$$\begin{cases} 2x - 3 \geqslant -4, \\ 2x - 3 \leqslant 3 \end{cases}$$

и решать её как обычную систему неравенств.

Ты прав. Но, зная свойства неравенств, оформление решения подобного двойного неравенства можно записать короче. В нашем случае поступим так: ко всем частям неравенств прибавим 3, а затем все части неравенств разделим на 2:

$$-4 \leqslant 2x - 3 \leqslant 3,$$

$$-4 + 3 \leqslant 2x - 3 + 3 \leqslant 3 + 3,$$

$$-1 \leqslant 2x \leqslant 6, \quad |:2$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{2x}{2} \leqslant \frac{6}{2},$$

$$-0{,}5 \leqslant x \leqslant 3.$$

Ответ. $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 3$.

А если бы при решении двойного неравенства пришлось выполнять деление всех частей на отрицательное число? Как тогда нужно было бы записывать результат?

Посмотрите, например, на возможное оформление решения неравенства $-1 < 5 - 3x \leqslant 10$. Вам всё станет понятно.

$$-1 < 5 - 3x \leqslant 10,$$

$$-1 - 5 < 5 - 3x - 5 \leqslant 10 - 5,$$

$$-6 < -3x \leqslant 5, \quad |:(-3)$$

$$2 > x \geqslant -\frac{5}{3}.$$

Ответ. $-\frac{5}{3} \leqslant x < 2$.

# § 10 Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие модуль

С нахождением модуля положительных чисел, отрицательных чисел и нуля вы знакомились в младших классах. В этом параграфе будет уточнён геометрический смысл модуля числа и дано строгое определение этого понятия. Вы научитесь решать простейшие уравнения и неравенства, содержащие неизвестное число под знаком модуля.

**Нужно вспомнить:**

- свойства уравнений;
- свойства неравенств;
- понятие решения системы линейных неравенств с одним неизвестным;
- записи числовых промежутков;
- изображение числовых промежутков на числовой оси.

## 1. Модуль числа.

Напомним понятие модуля числа.

1) Модуль положительного числа равен самому числу.

Например, $|3|=3$, $\left|\frac{2}{7}\right|=\frac{2}{7}$, $|2{,}4|=2{,}4$.

2) Модуль отрицательного числа равен противоположному ему числу.

Например, $|-2|=-(-2)=2$, $\left|-\frac{5}{6}\right|=-\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{6}$, $|-1{,}5|=-(-1{,}5)=1{,}5$.

3) Модуль нуля равен нулю: $|0|=0$.

**!** Определение. $|a|=a$, если $a\geqslant 0$,
$|a|=-a$, если $a<0$.

Это определение коротко записывают формулой:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

Рассмотрим **геометрический смысл модуля числа**. Изобразим на числовой оси, например, точки 3 и $-2$.

Из рисунка 21 видно, что $|3|=3$ есть расстояние от точки 0 до точки 3, $|-2|=2$ есть расстояние от точки 0 до точки $-2$.

Итак, геометрически $|a|$ есть расстояние от точки 0 до точки, изображающей число $a$.

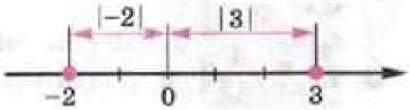



Рис. 21

### 2. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля.

**Задача 1.** Решить уравнение $|x|=7$.

▶ 1) Пусть $x \geqslant 0$. Тогда по определению модуля $|x|=x$, и уравнение принимает вид: $x=7$, т. е. $x=7$ — корень исходного уравнения.

2) Пусть $x<0$. Тогда по определению модуля $|x|=-x$, и уравнение принимает вид: $-x=7$, откуда $x=-7$ — корень исходного уравнения.

Ответ. $x_1=7$, $x_2=-7$. ◁

**Задача 2.** Решить уравнение $|3x+2|=1$.

▶ 1) Пусть $3x+2 \geqslant 0$. Тогда $3x+2=1$, $3x=-1$, $x=-\frac{1}{3}$.

2) Пусть $3x+2<0$. Тогда $3x+2=-1$, $3x=-3$, $x=-1$.

Ответ. $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=-1$. ◁

### 3. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля.

Рассмотрим неравенство $|x| \leqslant a$, где $a>0$.

Этому неравенству удовлетворяют все точки $x$, находящиеся на расстоянии, не большем $a$, от точки 0, т. е. точки отрезка $[-a;\ a]$ (рис. 22).

Отрезок $[-a;\ a]$ — это множество чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству $-a \leqslant x \leqslant a$.

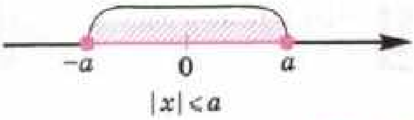



Рис. 22

Неравенство $|x| \leqslant a$, где $a>0$, означает то же самое, что и двойное неравенство $-a \leqslant x \leqslant a$.

Например, неравенство $|x| \leqslant 2{,}5$ означает, что $-2{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5$; неравенство $|x|<3$ означает, что $-3<x<3$.

**Задача 3.** Решить неравенство $|5-3x|<8$.

▶ Запишем данное неравенство в виде

$$-8<5-3x<8.$$

Это двойное неравенство означает то же самое, что и система неравенств:

$$\begin{cases}5-3x<8,\\5-3x>-8.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $-1<x<4\frac{1}{3}$ (рис. 23).

Ответ. $-1<x<4\frac{1}{3}$. ◁

Рассмотрим неравенство $|x|\geqslant a$, где $a>0$.
Этому неравенству удовлетворяют все точки $x$, находящиеся от точки 0 на расстоянии, не меньшем $a$, т. е. точки двух лучей $x\geqslant a$ и $x\leqslant -a$ (рис. 24).

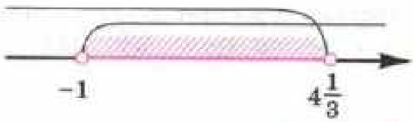



Рис. 23


Рис. 24

**Задача 4.** Решить неравенство $|x-1|\geqslant 2$.

▶ 1) Пусть $x-1\geqslant 0$. Тогда $x-1\geqslant 2$. Получим систему неравенств

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\x-1\geqslant 2.\end{cases}$$

Решая систему, находим $x\geqslant 3$.

2) Пусть $x-1<0$.

Тогда $-(x-1)\geqslant 2$, или $x-1\leqslant -2$.

Получим систему неравенств


Рис. 25

$$\begin{cases}x-1<0,\\x-1\leqslant -2.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x\leqslant -1$.

Итак, неравенство $|x-1|\geqslant 2$ выполняется, во-первых, при $x\geqslant 3$, а во-вторых, при $x\leqslant -1$.

Ответ. $x\leqslant -1$, $x\geqslant 3$. ◁

Решения неравенства $|x-1|\geqslant 2$ изображены на рисунке 25.

Отметим, что если в неравенстве $|x| \leqslant a$ число $a$ равно нулю, то неравенство имеет единственное решение $x=0$, а если $a<0$, то это неравенство не имеет решений.

Если в неравенстве $|x| \geqslant a$ число $a$ меньше или равно нулю, то любое число является его решением.

## Устные вопросы и задания

1. Сформулировать определение модуля числа.
2. В чём заключается геометрический смысл модуля числа?
3. Сколько корней имеет уравнение $|x|=a$, если $a>0$; $a=0$?
4. Решить уравнение $|x|=-7$.
5. Что является решениями неравенств $|x| \leqslant a$ и $|x| \geqslant a$, если $a>0$?
6. Решить неравенство $|x| \leqslant a$, если $a=0$; $a<0$.
7. Решить неравенство $|x| \geqslant a$, если $a<0$.
8. Привести пример неравенства, которому удовлетворяет множество чисел, изображённых на числовой оси (рис. 26, 27).


Рис. 26


Рис. 27

## Вводные упражнения

1. На каком расстоянии от точки $O$ на числовой оси расположено число 3,75; −5,12; 0; $-1\frac{1}{3}$?
2. Назвать целые числа, принадлежащие отрезку [−2; 2]. Каждое из них сравнить с модулем числа −2.
3. Назвать число, соответствующее середине отрезка [−7; 7].
4. Назвать самое большое целое отрицательное число, модуль которого больше чем 6.

5. Назвать самое маленькое натуральное число, модуль которого больше чем 3.

## Упражнения

**149.** (Устно.) Найти модуль числа:

1) 23; 2) 4,7; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $-47$; 5) $-2,1$; 6) $-\frac{3}{8}$.

Решить уравнение (150—153).

**150.** 1) $|x|=2,5$; 2) $|x|=1,5$; 3) $|x-1|=2$; 4) $|x+3|=3$.

**151.** 1) $|x+4|=0$; 2) $|x-2|=0$; 3) $|2x-3|=0$; 4) $|3-4x|=0$.

**152.** 1) $|3x-5|=5$; 2) $|4x+3|=2$;

3) $\left|\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{3}$; 4) $\left|\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$.

**153.** 1) $|-x|=3,4$; 2) $|-x|=2,1$; 3) $|5-x|=5$;
4) $|3-x|=8$; 5) $|4-5x|=5$; 6) $|3-4x|=3$.

**154.** Изобразить на числовой оси множество решений неравенства:
1) $|x|<5$; 2) $|x|\leqslant 4$; 3) $|x|\geqslant 3$; 4) $|x|>2$.

**155.** Записать неравенство с модулем в виде двойного неравенства:
1) $|x|\leqslant 3$; 2) $|x|<2$.

**156.** Двойное неравенство записать в виде одного неравенства с модулем:
1) $-3,1<x<3,1$; 2) $-0,3\leqslant x\leqslant 0,3$.

Решить неравенство (157—160).

**157.** 1) $|1+x|\leqslant 0,3$; 2) $|2+x|<0,2$; 3) $|x+0,5|<1,5$;
4) $|1-x|<\frac{3}{4}$; 5) $|3-x|\leqslant\frac{2}{3}$; 6) $\left|\frac{1}{3}+x\right|\leqslant\frac{2}{3}$.

**158.** 1) $|3x-4|<5$; 2) $|2x+3|<3$; 3) $|2x+1|\leqslant -3$;
4) $|5-4x|\leqslant 1$; 5) $|2-3x|\leqslant 2$; 6) $|3x+7|\leqslant -2$.

**159.** 1) $|x+1|>1,3$; 2) $|x-2|\geqslant 1,1$; 3) $|1-x|\geqslant\frac{1}{2}$; 4) $|3-x|>\frac{2}{3}$.

**160.** 1) $|4x-3|\geqslant 3$; 2) $|3x+2|>1$;
3) $|3x-2|>4$; 4) $|4-5x|\geqslant 4$.

**161.** Найти все целые значения $x$, при которых выполняется неравенство:
1) $|5x-2|<8$; 2) $|5x+3|<7$; 3) $|5-3x|\leqslant 1$; 4) $|3-4x|\leqslant 3$.

**162.** Решить неравенство:
1) $|2x-3|>5$; 2) $|3x-1|\leqslant 4$; 3) $|1-3x|\leqslant 1$;
4) $|3-2x|\geqslant 3$; 5) $|0{,}3-1{,}3x|<2{,}3$;
6) $|1{,}2-0{,}8x|\geqslant 2{,}8$.

**163.** Решить двойное неравенство, записав его в виде системы двух неравенств:
1) $-3<2x-9\leqslant 1$; 2) $3\leqslant 3x+1<5$;
3) $-4\leqslant 1-0{,}2x\leqslant 1{,}2$; 4) $-3\leqslant 2+1{,}5x\leqslant -2{,}5$.

**164.** При каких значениях $x$ выполняется равенство:
1) $|x+3|=x+3$; 2) $|x-2|=2-x$?

**165.** Пусть $a<0$. Выяснить, положительно или отрицательно значение выражения:
1) $a-|a|$; 2) $|-a|-a$; 3) $a^2|a|$; 4) $\frac{|a|}{a^3}$.

**166.** Выяснить, положительно или отрицательно число $a$, если:
1) $a^3|a|<0$; 2) $a|a|^2>0$; 3) $\frac{a^3}{|a|}>0$; 4) $\frac{|a|}{a}<0$.

**167.** Доказать, что:
1) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ при любых $a$ и $b$;
2) $|a^n|=|a|^n$ при любом $a$ и любом натуральном $n$;
3) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ при любом $a$ и любом $b\neq 0$;
4) $|a^n|=a^n$ при любом $a$, если $n$ — чётное натуральное число;
5) $|a^n|=-a^n$, если $a\leqslant 0$ и $n$ — нечётное натуральное число.

**168.** Доказать, что число $|a-b|$ равно расстоянию между точками $a$ и $b$ числовой оси.

**169.** Доказать, что $||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$ для любых чисел $a$ и $b$.

Это интересно

## Два неизвестных под знаками модулей

Профессор, Вы нас знакомили с решением неравенств с двумя неизвестными. Наверное, если в неравенстве неизвестные будут под знаками модулей, то найти решение такого неравенства будет очень сложно?

Я как раз хотел предложить вам неравенство с модулями, решение которого очень просто найти, если знаешь теорию. Решим неравенство $|3x-1|+|5-2y| \leqslant 0$.

Сумма модулей не больше нуля...

Ты близка к решению. Может ли модуль числа быть отрицательным? Какое наименьшее значение может принимать модуль выражения с неизвестным?

Я понял. Сумма двух неотрицательных чисел должна быть неотрицательной. Это возможно, только когда оба слагаемых — нули. Значит, наше неравенство имеет решение, когда $3x-1=0$ и $5-2y=0$, т. е. при $x=\frac{1}{3}$ и $y=2\frac{1}{2}$.

Молодец. Решил непростое на первый взгляд неравенство.

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

Решить уравнение **(170—171)**.

**170.** 1) $x(2x+5)=0$; 2) $x(3x-4)=0$;
3) $(x-5)(3x+1)=0$; 4) $(x+4)(2x-1)=0$.

**171.** 1) $\frac{2x+3}{3x-1}=0$; 2) $\frac{1-2x}{2x+5}=0$;
3) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}=0$; 4) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}=0$.

**172.** На числовой оси точка $a$ лежит левее точки $b$. Положительно или отрицательно число:
1) $b-a$; 2) $2+b-a$; 3) $a-b$; 4) $a-3-b$?

**173.** Доказать, что:

1) $9x^2+1\geqslant 6x$ при любом $x$; 2) $x+\frac{1}{16x}\geqslant\frac{1}{2}$ при $x>0$;

3) $\frac{x}{2}+5\leqslant-\frac{25}{2x}$ при $x<0$;

4) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{x-3}>\frac{1}{3-x}$ при $x>3$.

**174.** Доказать, что:

1) если $3b-a<a-b$, то $a>2b$;

2) если $2b+a>2a-b$, то $a<3b$;

3) если $\frac{2b}{3}-\frac{a}{6}>\frac{a}{3}+\frac{b}{6}$, то $a<b$;

4) если $1{,}24b-0{,}37a<2{,}63a-1{,}76b$, то $a>b$.

**175.** Доказать, что:

1) если $x<1{,}2$ и $y<5$, то $x+y<6{,}2$;

2) если $x>\frac{1}{4}$ и $y>2$, то $xy>\frac{1}{2}$.

**176.** Доказать, что если $x>-3$ и $y>1$, то:

1) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{7}y>-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{2}{7}x+\frac{1}{3}y>-1$;

3) $2{,}7x+1{,}1y>-7$; 4) $1{,}1x+2{,}7y>-0{,}7$.

**177.** Пусть $a>b>0$. Доказать, что:

1) $a^3>b^3$; 2) $a^3>ab^2$; 3) $a^4>a^2b^2$; 4) $a^2b^2>b^4$.

**178.** Решить неравенство:

1) $x+9>8-4x$; 2) $3(y+4)\geqslant 4-(1-3y)$;

3) $5(0{,}2+y)-1{,}8\geqslant 4{,}3+5y$; 4) $3(x-5)+9>15$.

**179.** Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases}0{,}5(x+3)-0{,}8<0{,}4(x+2)-0{,}3,\\0{,}7(2-x)+1{,}3<0{,}6(1-x)+2{,}2;\end{cases}$

2) $\begin{cases}1{,}5(x-2)-2{,}1<1{,}3(x-1)+2{,}5,\\1{,}3(x+3)+1{,}7>1{,}6(x+2)+1{,}8.\end{cases}$

3) $\begin{cases}3{,}4(x+1)+0{,}4\geqslant 1{,}9(x-2)+1{,}6,\\2{,}8(x+3)-x\geqslant 2{,}2(x+4)-1{,}2.\end{cases}$

**180.** Множество чисел $x$, изображённое на рисунке 28, записать в виде двойного неравенства и неравенства, содержащего знак модуля.

**181.** Множество чисел $x$, изображённое на рисунке 29, записать в виде неравенства, содержащего знак модуля.

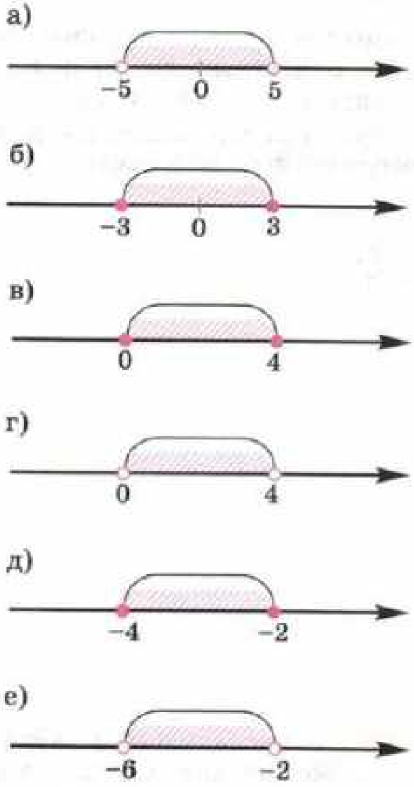



Рис. 28

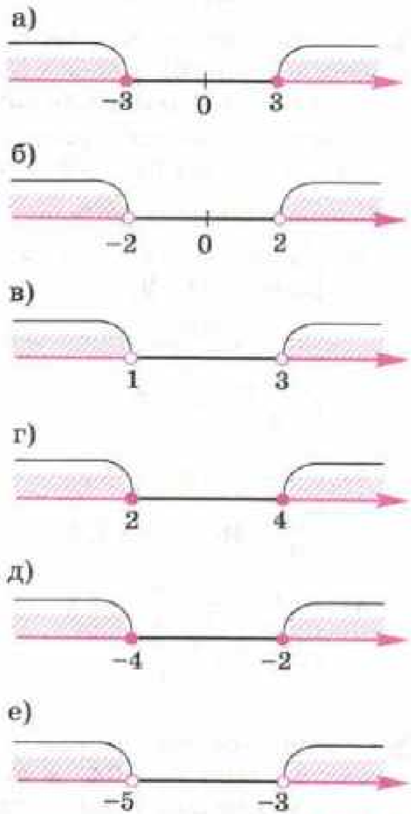



Рис. 29

**182.** Решить уравнение:

1) $|x-1|=3{,}4$; 2) $|1-x|=2{,}4$;

3) $|1-2x|=5$; 4) $|3x-2|=1$.

**183.** Решить неравенство:

1) $|x-1|\leqslant 3{,}4$; 2) $|x-1|\geqslant 3{,}4$; 3) $|x-1|<3{,}4$;

4) $|2x+1|\geqslant 3$; 5) $|5x+1|<3$; 6) $|4x-0{,}8|\geqslant 2$.

**184.** Пусть $a<2b$. Доказать, что:

1) $4a-2b<a+4b$;  2) $3a-2b<a+2b$;

3) $a+2b>3a-2b$;  4) $a+b>4a-5b$.

**185.** Одна сторона треугольника больше 4 см, вторая в 1,5 раза больше первой, третья в 1,5 раза больше второй. Доказать, что периметр треугольника больше 19 см.

**186.** Указать значения $x$ (если они существуют), при которых значения функций $y=-x+1$ и $y=x+2$ одновременно: 1) положительны; 2) отрицательны; 3) больше 1; 4) больше 2.

Ответ проиллюстрировать с помощью графиков данных функций, построенных на одной координатной плоскости.

**187.** Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 0{,}4(x+3)-1{,}7\geqslant 0{,}3(x-5)+0{,}7x, \\ 0{,}4(x-1)+0{,}5x\geqslant 0{,}3(x+5)-0{,}9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{7}\leqslant \dfrac{2x-3}{5}, \\ \dfrac{6x-8}{3}\leqslant \dfrac{3+5x}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{7-x}{2}-3\leqslant \dfrac{3+4x}{5}, \\ \dfrac{5x}{3}+5(4-x)>2(4-x)+13; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0{,}4x+\dfrac{7}{3}<\dfrac{2}{3}x-1{,}2, \\ \dfrac{2x+9}{7}>\dfrac{5x-3}{4}. \end{cases}$

**188.** Сумма чётного числа с утроенным последующим чётным числом больше 134, а сумма этого же чётного числа с удвоенным предыдущим чётным числом меньше 104. Найти это число.

**189.** Сумма нечётного числа с удвоенным последующим нечётным числом меньше 151, а сумма этого же нечётного числа с утроенным предыдущим нечётным числом больше 174. Найти это число.

**190.** Бригада рабочих за 5 дней изготовила меньше 300 деталей, а за 10 дней — больше 500 деталей. Сколько деталей в день изготовил каждый рабочий, если в бригаде 8 человек и производительность труда рабочих одинакова?

**191.** За 8 рейсов автобус перевёз больше 185 пассажиров, а за 15 рейсов — меньше 370 пассажиров. Сколько мест в автобусе, если в каждом рейсе автобус перевозил ровно столько пассажиров, сколько мест в автобусе?

**192.** Доказать, что:

1) $2b-a<3a-2b$ тогда и только тогда, когда $a>b$;
2) $a+2b>4a-b$ тогда и только тогда, когда $a<b$;
3) $a-2b>3a+2b$ тогда и только тогда, когда $a+2b<0$;
4) $b-2a<4a+3b$ тогда и только тогда, когда $3a+b>0$.

**193.** Скорость течения реки равна $a$ километрам в час. С какой постоянной скоростью относительно воды должен двигаться катер, чтобы путь между пристанями он прошёл вниз по течению реки по крайней мере в 3 раза быстрее, чем тот же путь вверх по течению реки?

**194.** В раствор объёмом 5 л, содержащий 30% кислоты, начали вливать раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько нужно влить второго раствора в первый, чтобы их смесь содержала не менее 60% кислоты?

**195.** Доказать, что если $|x-a|=|x-b|$, где $a<b$, то $x$ — середина отрезка $[a;\ b]$, т. е. $x=\frac{a+b}{2}$.

**196.** Решить уравнение:

1) $|x-1|=|x-2|$; 2) $|x-5|=|x-8|$; 3) $|x+1|=|x-2|$;
4) $|x+3|=|x-5|$; 5) $|x+3|=|x+7|$; 6) $|x+6|=|x+10|$.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

**1.** Волосы на голове человека растут со скоростью примерно 0,4 мм в сутки. Определить наибольший промежуток времени между двумя посещениями парикмахерской мальчиком, который хочет носить волосы длиной не короче 3 см, но и не длиннее 5 см.

**2.** Для того чтобы температуру C, выраженную в градусах по шкале Цельсия, перевести в температуру F, выраженную в градусах по шкале Фаренгейта, пользуются формулой $F=\frac{5}{9}C+32$. Определить: 1) F, если $10\leqslant C\leqslant 25$; 2) C, если $5\leqslant F\leqslant 32$.

3. В некотором городе оплата за услуги телефонной связи определяется следующим образом. Каждый абонент платит ежемесячно 400 р. плюс 0,2 р. за каждую минуту разговора. Какое наибольшее время разговоров по телефону может позволить себе абонент в месяц, если не хочет, чтобы ежемесячная оплата услуг телефонной связи превысила 700 р.?

4. По закону Гука при малых деформациях сила упругости прямо пропорциональна величине деформации. При растяжении и сжатии пружины модуль силы упругости $F_{\text{упр}}$ (выраженный в ньютонах) находится по формуле $F_{\text{упр}} = k \cdot |x|$, где $k$ — коэффициент упругости пружины (выраженный в ньютонах на метр), $x$ — удлинение пружины (выраженное в метрах). Определить силу упругости $F_{\text{упр}}$ для пружины, имеющей $k = 200$, если $0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}5$.

5. Оценить кинетическую энергию $E$(Дж) тела массой $m$(кг), движущегося со скоростью $v$ (м/с), если: 1) $2 \leqslant m \leqslant 3$, $1 \leqslant v \leqslant 2$; 2) $3 < m < 4$, $6 < v < 8$. Известно, что $E = \frac{mv^2}{2}$.

6. Слава должен приехать на первый урок в школу к 9 ч. На дорогу от дома до автобусной остановки он тратит от 10 до 11 мин, на поездку в автобусе (с учётом ожидания автобуса) — от 25 до 32 мин, а на дорогу от автобуса до школы — от 2 до 3 мин. Успеет ли Слава к началу занятий, если выйдет из дома: 1) в 8 ч 20 мин; 2) в 8 ч 10 мин?

7. Показателем подготовленности к зиме сеголетков (рыб в возрасте до года) является так называемый коэффициент упитанности $k$, который находится по формуле $k = \frac{100m}{l^3}$, где $m$ (г) — масса, $l$ (см) — длина рыбы. Зимовку переносят лишь те сеголетки, у которых $k > 2{,}8$. Можно ли оставлять на зиму сеголетков карпа массой 25 г и длиной 9,5 см?

8. На экзамене по математике студенту предлагают решить 12 задач. За каждую решённую задачу начисляют 8 баллов, за каждую нерешённую снимают 2 балла. Для того чтобы получить положительную оценку, необходимо набрать не менее 56 баллов. Сколько задач нужно решить, чтобы получить положительную оценку?

9. Центростремительное ускорение $a_{\text{ц}}$ (м/с$^2$) тела, равномерно движущегося по окружности, находится по формуле $a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R}$, где $v$ (м/с) — линейная скорость движения тела, $R$ (м) — радиус обращения. Оценить величину центростремительного ускорения, если $0{,}5 \leqslant R \leqslant 1$, $2 \leqslant v \leqslant 6$.

## В этой главе вы узнали,

**что такое:**

— числовое неравенство;
— строгое и нестрогое неравенство;
— линейное неравенство с одним неизвестным;
— решение неравенства с одним неизвестным;
— решение системы неравенств с одним неизвестным;
— числовые промежутки (луч, отрезок, интервал, полуинтервал);
— модуль числа;

**как:**

— сравнивать числа;
— доказывать неравенства;
— применять основные свойства неравенств, теоремы сложения и умножения в действиях с неравенствами;
— решать неравенства и системы неравенств с одним неизвестным;
— решать уравнения и неравенства, содержащие модуль.

## ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

**1.** Доказать, что при всех значениях $x$ верно неравенство

$$\frac{1}{2}x(2x-4) \geqslant (x-2)x.$$

**2.** Решить неравенство:

а) $12-5x>0$; б) $3x-7 \leqslant 4(x+2)$;

в) $\frac{x}{2}+\frac{3-x}{4}<2$.

**3.** Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases}3x-13>0,\\25-4x>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x-13 \geqslant 3x-10,\\11-4x \leqslant 12-3x;\end{cases}$

в) $\begin{cases}5x+3<3x-7,\\1-2x>x+4.\end{cases}$

II уровень

4. Доказать, что при любых значениях $a$ верно неравенство

$$(a-2)(a^2+a+4)<a^3.$$

5. Пусть $a>5$, $b>1$, $c>3$. Доказать, что $2a+3bc>15$.
6. Решить неравенство:

а) $\frac{-5,6}{3x-8}>0$; б) $\frac{x+5}{2}-1\leqslant\frac{3x-7}{4}$.

7. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases}9x+5\leqslant 7x-4,\\ 15-2x>3x+1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}0,6x-1,2<1,1x+2,1,\\ 2,3+1,7x\leqslant 1,5x+3.\end{cases}$

8. Решить неравенство:

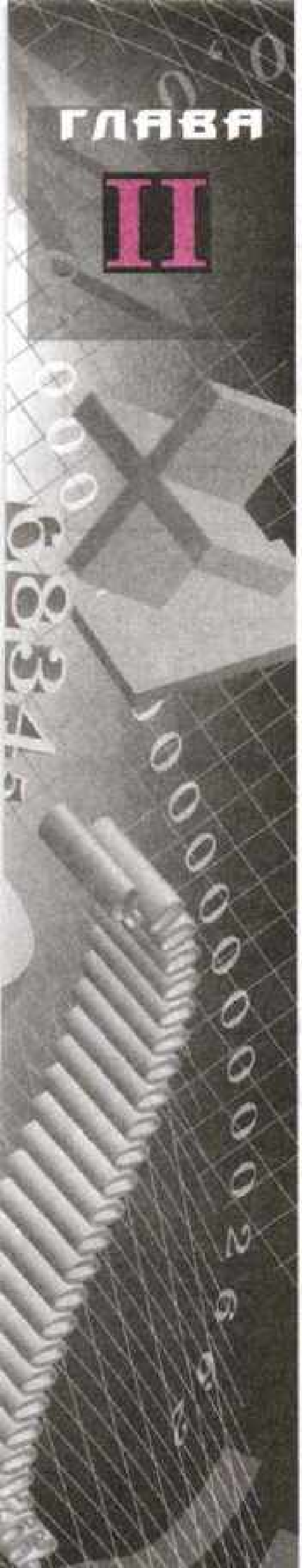
а) $|x-2|<8$; б) $|4x+1|\geqslant 5$.

III уровень

9. Пусть $a<b$ и числа $a$ и $b$ — отрицательные. Доказать, что $a^4>b^4$.
10. Доказать, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant 2$, если $ab>0$.
11. При каких значениях $x$ точки графика функции $y=\frac{1}{2}x-8$ лежат ниже точек графика функции $y=-\frac{3}{2}x+5$?
12. Решить двойное неравенство $-1\leqslant 5-0,2x\leqslant 3$.
13. Решить неравенство $|4x-3|<3x+1$.

## ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Решение с помощью графиков неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля.
2. Методы доказательства неравенств.
3. Неравенства в геометрии.
4. Решение неравенств с параметрами.
5. Неравенства в «Началах» Евклида.



# ГЛАВА II

# Приближённые вычисления

С древних времён люди занимались подсчётом предметов и измерением различных величин. Однако при подсчётах большого количества предметов и при громоздких вычислениях редко удавалось получать точные результаты. Измерения величин тоже давали приближённые значения, так как не существует абсолютно точных измерительных инструментов. А измерение одной и той же величины разными способами или разными приборами даёт похожие, но всё же разные результаты.

При решении практических задач людям приходится иметь дело в основном с приближёнными значениями величин. Например, при геодезических и астрономических измерениях, какими бы совершенными приборами и как бы тщательно они ни производились, результаты выражаются приближёнными числами. Каждый понимает, что при покупке 1 кг сахара он приобретает, скорее всего, на несколько граммов продукта больше или меньше. Слушая по радио информацию о том, что на выборах за какого-то кандидата в регионе проголосовало 31,28% избирателей, мы мысленно прикидываем: даже от 1 млн избирателей данное число процентов составляет 312 800 человек. И понимаем, что число проголосовавших в действительности на несколько десятков человек больше или меньше (число 312 800 — результат округления истинного значения проголосовавших до сотен человек).

Округлять числа вы научились в младших классах и знаете, например, как округлять числа до десятых долей: $3{,}48 \approx 3{,}5$; $3{,}45 \approx 3{,}5$; $3{,}43 \approx 3{,}4$ (если в разряде сотых стоит число не меньше 5, то округляем с избытком, если меньше — с недостатком). Округлением чисел, записью приближённых значений величин люди занимаются постоянно: при составлении планов развития отраслей народного хозяйства (на государственном уровне) и при планировании бюджета семьи; при измерении больших и малых величин и т. д. Важно только знать, *с какой точностью* следует выполнять то или иное вычисление или измерение. Например, все понимают, что расстояние от Земли до Луны с точностью до метра измерить сложно и вряд ли нужно. С теорией приближённых вычислений, важной для любой деятельности, вы познакомитесь в этой главе.

## § 11 Приближённые значения величин. Погрешность приближения

При подсчёте большого количества предметов (например, деревьев в лесу), при измерениях различных величин (например, длины отрезка, массы тела, температуры воздуха), при округлении чисел, при вычислениях на микрокалькуляторе и т. д. обычно получают приближённые значения величин, чисел. При этом в разных случаях получают и разные погрешности результатов действий. В этом параграфе вы познакомитесь с понятием абсолютной погрешности — одной из характеристик приближения.

**Нужно вспомнить:**

- понятие модуля числа;
- единицы длины;
- единицы величины угла;
- теорему о сумме углов треугольника.

При решении практических задач часто приходится иметь дело с **приближёнными значениями различных величин.**

Рассмотрим несколько примеров:

1) в классе 36 учеников;
2) в рабочем посёлке 10 000 жителей;
3) железнодорожный рельс имеет длину 25 м;
4) рабочий получил в кассе 12 576 р.;
5) в самолёте Як-42 имеется 120 пассажирских мест;
6) расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом 650 км;
7) в килограмме пшеницы содержится 30 000 зёрен;
8) расстояние от Земли до Солнца $1{,}5 \cdot 10^8$ км.

В примерах 1, 4, 5 значения величин точные, а в остальных — приближённые.

**Задача 1.** Один из школьников на вопрос о том, сколько учащихся учится в школе, ответил: «приблизительно 1000», а другой на тот же вопрос ответил: «приблизительно 950». Чей ответ точнее, если в школе учится 986 учащихся?

▶ Первый школьник ошибся на 14, а второй — на 36. Следовательно, более точным был ответ первого учащегося. ◁

Разность между точным и приближённым значениями числа учащихся в первом случае отрицательна: $986-1000=-14$, а во втором случае положительна: $986-950=36$.

Практически важно знать отклонение приближённого значения от точного в ту или иную сторону, т. е. модуль (абсолютную величину) разности между точным значением и приближённым.

Модуль разности между точным значением величины и её приближённым значением называется **абсолютной погрешностью приближения.**

Таким образом, если $a$ — приближённое значение величины, точное значение которой равно $x$, то абсолютная погрешность приближения равна $|x-a|$.

Абсолютную погрешность приближения часто называют просто погрешностью.

**Задача 2.** При нахождении суммы углов треугольника с помощью транспортира получили результат $182°$. Какова абсолютная погрешность этого приближения?

► Точное значение суммы углов треугольника равно $180°$, приближённое значение равно $182°$. Поэтому абсолютная погрешность равна $2°$, так как $|180-182|=|-2|=2$. ◁

**Задача 3.** Найти погрешность приближения числа $\frac{3}{7}$ десятичной дробью 0,43.

► $\left|\frac{3}{7}-0{,}43\right|=\left|\frac{3}{7}-\frac{43}{100}\right|=\left|\frac{300-301}{700}\right|=\left|-\frac{1}{700}\right|=\frac{1}{700}$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Что называют абсолютной погрешностью приближения?
2. Как найти абсолютную погрешность приближения, если $c$ — приближённое значение числа $y$?

## Вводные упражнения

1. Найти модуль числа $-7$; $0{,}2$; $0$.
2. Найти модуль разности чисел:

   1) 5 и 12; 2) $-3$ и $-8$; 3) $-4$ и 12; 4) 3 и $-9$.
3. Найти $\angle A$ треугольника $ABC$, если:

   1) $\angle B=15°$, $\angle C=65°$; 2) $\angle B=120°$, $\angle C=23°$.

4. Выразить в сантиметрах 5 м; 1,2 дм; 27 мм; 4 мм.

5. Выразить в метрах 263 см; 39 см; 56 мм; 491 мм.

## Упражнения

**197.** Высказать предположение, какие из приведённых в примерах чисел являются точными значениями величин, а какие приближёнными:

1) в зрительном зале 660 мест;

2) тетрадь имеет толщину 3 мм;

3) за год автомобильным заводом было выпущено 600 тыс. автомобилей.

**198.** При измерении ширины обложки книги с помощью линейки получен результат в промежутке от 14,2 до 14,3 см.

1) Можно ли назвать точное значение ширины книги?

2) Указать несколько приближённых значений ширины книги.

**199.** Найти абсолютную погрешность приближения числа $\frac{4}{9}$ числом: 1) $\frac{6}{13}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0,3; 4) 0,44.

**200.** Найти погрешность приближения:

1) числа 0,1975 числом 0,198;

2) числа −3,254 числом −3,25;

3) числа $-\frac{8}{17}$ числом $-\frac{1}{2}$;

4) числа $\frac{22}{7}$ числом 3,14.

**201.** Пусть $a$ — приближённое значение числа $x$. Найти погрешность приближения, если:

1) $x=5{,}346$, $a=5{,}3$; 2) $x=4{,}82$, $a=4{,}9$;

3) $x=15{,}9$, $a=16$; 4) $x=25{,}08$, $a=25$.

**202.** Известно, что сумма внутренних углов четырёхугольника равна 360°. При нахождении суммы внутренних углов четырёхугольника с помощью транспортира получили результат 363°. Чему равна погрешность приближения?

**203.** С помощью графиков функций $y=7x+9$ и $y=1$ получили, что эти графики пересекаются в точке с абсциссой, равной −1. Чему равна погрешность этого приближения?

**204.** Верно ли, что десятичная дробь 0,33 является приближённым значением числа $\frac{1}{3}$ с абсолютной погрешностью, меньшей 0,01?

**205.** Приближённое значение числа $x$ равно 2,4, абсолютная погрешность меньше 0,1. Найти промежуток, в котором заключено точное значение $x$.

**206.** Пусть 7,43 — приближённое значение числа $x$, а абсолютная погрешность приближения меньше 0,01. В каком промежутке заключено точное значение числа $x$?

Разговор о важном

### Графический способ как приближённый способ решения уравнений

Я поверил авторам учебника, что построенные ими графики функций $y = 7x + 9$ и $y = 1$ в упражнении 203 пересеклись в точке с абсциссой, примерно равной $-1$. Затем решил систему уравнений $\begin{cases} y = 7x + 9, \\ y = 1. \end{cases}$

Решал я такую систему потому, что в задаче речь идёт о точке пересечения графиков данных функций, т. е. об общей их точке. Я нашёл абсциссу такой точки: $x = -1\frac{1}{7}$. Затем определил погрешность приближения числа $-1\frac{1}{7}$ числом $-1$:

$$\left| -1\frac{1}{7} - (-1) \right| = \frac{1}{7}.$$

Что ж, ты решал задачу верно. Только можно было решать не систему, а сразу уравнение $7x + 9 = 1$, так как точка пересечения графиков данных функций имеет общую для них ординату $y = 1$.

То есть в упражнении 203 графически решалось уравнение $7x + 9 = 1$ и находилось приближённое значение его корня?

Верно. Попробуйте теперь самостоятельно решить *графическим способом* уравнение $\frac{x}{3} - 1 = |x| - 2$.

А затем сравните найденные абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \frac{x}{3} - 1$ и $y = |x| - 2$ с точными значениями корней исходного уравнения.

**Наверно, не всегда легко найти точные значения корней некоторых уравнений...**

**Действительно, существует много видов уравнений, точные значения корней которых найти очень сложно. А графически или с помощью других способов можно найти их приближённые значения. Ещё древние китайские, арабские и среднеазиатские учёные разрабатывали такие способы. В Европе приближёнными способами (методами) находили корни алгебраических уравнений Ф. Виет и И. Ньютон. Общие же методы графического решения уравнений впервые изложил в своей книге «Геометрия» Р. Декарт. Сегодня *методы численного* (приближённого) *решения уравнений* применяются во многих областях науки и техники.**

## § 12 Оценка погрешности

При решении практической задачи не всегда удаётся определить точное значение измеряемой величины. Но оценить погрешность измерения и определить диапазон, которому принадлежит точное значение величины, — задача реальная. Решению таких задач вы и научитесь при изучении данного параграфа.

**Нужно вспомнить:**

- понятие абсолютной погрешности приближения;
- понятие двойного неравенства;
- решение неравенства вида $|x| \leqslant c$; $|x - a| \leqslant c$;
- единицы длины, массы.

Во многих случаях точное значение величины неизвестно, и тогда абсолютную погрешность приближения найти нельзя. Тем не менее часто удаётся дать **оценку абсолютной погрешности**, если известны приближения с избытком и с недостатком.

**Задача 1.** В комнатном термометре верхний конец столбика жидкости находится между отметками 21 и 22 °C. В качестве приближённого значения температуры взяли величину 21,5 °C. Оценить абсолютную погрешность приближения указанного измерения.

▶ Точное значение температуры $t$ неизвестно, однако можно утверждать, что $21 \leqslant t \leqslant 22$.

Чтобы получить оценку разности между точным значением температуры и приближённым, т. е. разности $t - 21{,}5$, вычтем из каждой части этого двойного неравенства число 21,5.

Получим $-0{,}5 \leqslant t - 21{,}5 \leqslant 0{,}5$, т. е. $|t - 21{,}5| \leqslant 0{,}5$. Таким образом, абсолютная погрешность не больше 0,5. ◁

В этом случае говорят также, что температура измерена с точностью до 0,5, и записывают: $t = 21{,}5 \pm 0{,}5$.

**!** Если $a$ — приближённое значение числа $x$ и $|x - a| \leqslant h$, то говорят, что **число $x$ равно числу $a$ с точностью до $h$**, и пишут:

$$\boldsymbol{x = a \pm h}. \tag{1}$$

При этом $h$ называют **границей абсолютной погрешности.**

Напомним, что неравенство $|x - a| \leqslant h$ означает то же самое, что и двойное неравенство

$$a - h \leqslant x \leqslant a + h. \tag{2}$$

Например, запись $x = 2{,}43 \pm 0{,}01$ означает, что значение $x$ равно 2,43 с точностью до 0,01, т. е. $2{,}43 - 0{,}01 \leqslant x \leqslant 2{,}43 + 0{,}01$, или $2{,}42 \leqslant x \leqslant 2{,}44$. Числа 2,42 и 2,44 являются приближёнными значениями числа $x$ с недостатком и с избытком.

Практически при измерении, рассмотренном в задаче 1, в качестве приближённого значения берут 21 или 22 °C. В этом случае абсолютная погрешность каждого из этих приближений не превосходит 1 °C. Поэтому обычно считают, что измерение температуры с помощью термометра, на котором деления нанесены через 1 °C, проводится с точностью до 1 °C.

Аналогично и для других измерительных приборов **точность измерения** обычно устанавливается по наименьшему делению прибора. Например, микрометром измеряют длину с точностью до 0,01 мм; медицинским термометром измеряют температуру с точностью до 0,1 °C; будильник показывает время с точностью до 1 мин; наручные часы с секундной стрелкой показывают время с точностью до 1 с.

Таким образом, погрешность измерения зависит от того, каким прибором ведётся это измерение. Чем меньше погрешность приближения, тем точнее измерительный прибор.

Приближёнными значениями часто пользуются при замене обыкновенных дробей десятичными.

**Задача 2.** Доказать, что число 0,43 является приближённым значением дроби $\frac{13}{30}$ с точностью до 0,01.

▶ Требуется доказать, что $\left|\frac{13}{30}-0{,}43\right| \leqslant 0{,}01$. Вычислим разность $\frac{13}{30}-0{,}43=\frac{13}{30}-\frac{43}{100}=\frac{130-129}{300}=\frac{1}{300}$. Значит, $\left|\frac{13}{30}-0{,}43\right|=\frac{1}{300}$.

Так как $\frac{1}{300}<0{,}01$, то $\left|\frac{13}{30}-0{,}43\right| \leqslant 0{,}01$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Что означает запись $x=a \pm h$, где $a$ — приближённое значение числа $x$? Как в этой записи называют $h$?
2. Как с помощью двойного неравенства записывается неравенство $|x-a| \leqslant h$?
3. Как установить точность измерительного прибора?
4. Как доказать, что число 0,7 является приближённым значением дроби $\frac{2}{3}$ с точностью до 0,1?

## Вводные упражнения

1. Решить неравенство:
   1) $|x|>5$; 2) $|x| \geqslant -5$; 3) $|x| \leqslant 2$; 4) $|x|<-2$.
2. Записать в виде двойного неравенства:
   1) $|x|<12$; 2) $|x| \leqslant 8$; 3) $|x-9| \leqslant 3$; 4) $|x+4|<1$.
3. Решить неравенство:
   1) $|x+5|>4$; 2) $|x-10| \geqslant 3$; 3) $|x-1| \leqslant 7$; 4) $|x+3|<2$.
4. Какие из дробей $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{30}$, $\frac{4}{75}$, $\frac{1}{125}$ не могут быть записаны в виде конечной десятичной дроби?
5. Записать в виде десятичной дроби: $\frac{11}{50}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{250}$.
6. Записать в виде десятичной периодической дроби: $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{7}$.

## Упражнения

**207.** Что означает запись:

1) $x=3{,}9\pm0{,}2$; 2) $x=0{,}4\pm0{,}15$; 3) $x=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{10}$;

4) $x=0{,}73\pm0{,}01$; 5) $x=-135\pm1$; 6) $x=-2\frac{1}{5}\pm\frac{1}{10}$?

**208.** Записать в виде двойного неравенства:

1) $x=11\pm0{,}5$; 2) $m=142\pm1$; 3) $l=3{,}7\pm0{,}1$;

4) $v=900\pm5$; 5) $x=a\pm h$; 6) $y=m\pm n$.

**209.** Найти приближённые значения числа $x$ с недостатком и с избытком, если известно, что:

1) $x=4\pm0{,}1$; 2) $x=2{,}7\pm0{,}1$;

3) $x=-0{,}6\pm0{,}12$; 4) $x=-5{,}9\pm0{,}2$.

**210.** Пусть $x=5{,}8\pm0{,}2$. Может ли точное значение оказаться равным: 1) 5,9; 2) 6,001; 3) 6; 4) 5,81?

**211.** Пусть $x=8{,}7\pm0{,}4$. Может ли число $x$ быть равным:

1) 8,222; 2) 8,4; 3) 9; 4) 9,5?

**212.** Указать приближённое значение числа $x$, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком:

1) $20\leqslant x\leqslant22$; 2) $5\leqslant x\leqslant6$; 3) $4{,}5\leqslant x\leqslant4{,}8$;

4) $3{,}7\leqslant x\leqslant4{,}1$; 5) $2{,}81\leqslant x\leqslant2{,}83$; 6) $0{,}55\leqslant x\leqslant0{,}6$.

**213.** Доказать, что:

1) 2,7 есть приближённое значение 2,7356 с точностью до 0,5;

2) число 0,27 является приближённым значением дроби $\frac{11}{40}$ с точностью до 0,01.

**214.** Является ли число 4 приближённым значением дроби 4,3 с точностью до 0,5? до 0,1?

**215.** Согласно оптическим и радиолокационным измерениям диаметр Меркурия равен $(4880\pm2)$ км, а радиус Венеры равен $(6050\pm5)$ км. Записать результат измерения в виде двойного неравенства.

**216.** Для измерения диаметра цилиндра рабочий пользуется калиброметром, в котором имеются отверстия диаметром 10,00; 10,04; 10,08; 10,56 мм. Какова точность измерения?

**217.** В отделе технического контроля завода измеряется диаметр вала с точностью до 0,1 мм. По таблице допусков диаметр $d$ вала должен быть в промежутке $167{,}8\leqslant d\leqslant168{,}2$. Забракуют ли вал, если его диаметр равен 168,1 мм?

**218.** Высота собора Петропавловской крепости в Санкт-Петербурге 122 м. Экскурсовод сказал, что высота собора приближённо равна 120 м. Какова погрешность такого приближения?

**219.** При взвешивании тела на вторую чашку весов положили 4 гири, массы которых соответственно равны 100 г, 2 г, 100 мг, 10 мг, после чего весы уравновесились. Чему равна масса тела (в мг)? Оценить точность измерения.

Диалог об истории

### Погрешности измерений у астрономов Древней Греции

Профессор, а в древности люди пользовались понятием абсолютной погрешности?

Конечно, пользовались, но обходились без этого термина. Например, древнегреческий учёный *Аристарх Самосский* в III в. до н. э. в своём трактате «О расстояниях Солнца и Луны» доказал следующее:

1) расстояние $L$ от Земли до Солнца более 18-кратного, но менее 20-кратного расстояния от Земли до Луны;
2) отношение $K$ диаметра Солнца к диаметру Земли больше $19:3$ и меньше $43:6$.

По этим данным я смогу записать двойные неравенства для величин $L$ и $K$: $18n < L < 20n$ ($n$ — расстояние от Земли до Луны), $\frac{19}{3} < K < \frac{43}{6}$. При желании я могу найти абсолютную погрешность расчётов Аристарха Самосского. Удивительно, как давно люди занимаются астрономией!

Разговор о нужном

### Точность измерений в жизни

Мы уже поняли, Профессор, что точность измерительных приборов обычно устанавливают по наименьшему делению его шкалы (правда, я видел приборы, у которых точность — половина наименьшего деления). А как и кто в реальной жизни устанавливает точность, с которой следует измерить конкретную величину? Например, кто даёт право машинисту электрички отставать от расписания или немного опережать его? На сколько минут или секунд он может отстать от расписания?

Конкретно в этой ситуации право машинисту никто не даёт. Он должен ехать по расписанию. Но абсолютно точно следовать расписанию невозможно. Большое число поездок на электропоезде само определяет границу абсолютной погрешности прибытия поезда на нужную станцию в срок. На формирование этой погрешности влияет много факторов: погодные условия, ремонтные работы, человеческий фактор и т. д. В каждой житейской ситуации величина абсолютной погрешности приближения определяется конкретными условиями или требованиями.

Приведите, пожалуйста, примеры понятных нам жизненных ситуаций, в которых известно, с какой погрешностью выполнено приближение.

Хорошо, приведу несколько примеров.

- ✓ Отклонение на 15 с в ту или иную сторону от времени отправления поезда по расписанию не считается нарушением графика движения.
- ✓ Норма высева семян в сельском хозяйстве определяется с точностью 3—5 кг на гектар площади посева.
- ✓ При определении времени движения лыжников при скоростном спуске на спортивных соревнованиях учитывают сотые доли секунды.
- ✓ При измерении диаметра трубы газопровода допускается погрешность до 1 мм.
- ✓ В астрономии при наблюдении за движением небесных тел момент прохождения светила через меридиан определяется с точностью до тысячных долей секунды.

# § 13 Округление чисел

В этом параграфе вы встретитесь с понятием округления чисел и научитесь округлять числа с наперёд заданной точностью.

**Нужно вспомнить:**

- названия разрядов записи числа в десятичной системе счисления;
- запись обыкновенной дроби в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби;
- единицы измерения длины, площади, массы, времени, скорости;
- понятие модуля числа.

**Округление чисел** используется при действиях с приближёнными значениями различных величин во многих практических задачах математики, физики, техники.

Например, ускорение свободного падения на уровне моря и широте 45° равно 9,80665 м/с$^2$. Обычно это число округляют до десятых: 9,8. При этом пишут: $g \approx 9,8$ (читается «$g$ приближённо равно 9,8»).

**!** Запись $x \approx a$ означает, что число $a$ является приближённым значением числа $x$.

**Задача 1.** Площадь земельного участка прямоугольной формы равна 25 м$^2$, его длина равна 8 м. Найти ширину участка.

► Пусть ширина участка равна $l$ метров, тогда $l = 25 : 8 = 3,125$.

Ответ. 3,125 м. ◁

Полученную ширину участка на практике округлили бы до десятых, т. е. полагали бы, что $l \approx 3,1$. Рассмотрим правило округления чисел на следующем примере. Пусть требуется округлить число 3,647 до сотых. Для округления с недостатком отбросим последнюю цифру 7, в результате получим 3,64.

Для округления с избытком отбросим последнюю цифру 7, а предпоследнюю увеличим на единицу. В результате получим 3,65. В первом случае абсолютная погрешность округления равна $|3,647 - 3,64| = 0,007$. Во втором случае абсолютная погрешность равна $|3,647 - 3,65| = 0,003$.

Во втором случае погрешность приближения меньше, чем в первом случае. Следовательно, в рассматриваемом примере наилучшим является округление с избытком.

Чтобы абсолютная погрешность приближения при округлении положительных чисел была наименьшей, пользуются **правилом**:

Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то нужно округлять с недостатком, а если эта цифра больше или равна 5, то нужно округлять с избытком.

Например, при округлении до десятых получаем: $3,647 \approx 3,6$, $2,658 \approx 2,7$; при округлении до сотых получаем: $0,6532 \approx 0,65$, $9,0374 \approx 9,04$.

**Задача 2.** Заменить число $\frac{2}{7}$ десятичной дробью, равной этому числу с точностью до 0,01.

► Запишем результат деления 2 на 7 в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой: $\frac{2}{7} = 0,285\ldots$. Округляя это число до сотых, получаем $\frac{2}{7} \approx 0,29$. ◁

Чтобы получить значение с точностью до 0,01, было найдено значение $\frac{2}{7}$ с тремя знаками после запятой. Если бы потребовалось найти приближённое значение числа $\frac{2}{7}$ с точностью до 0,001, то надо было бы найти четыре десятичных знака.

## Устные вопросы и задания

1. Что называют абсолютной погрешностью округления?
2. Что означает запись $y \approx b$?
3. Сформулировать правило округления положительных чисел.

## Вводные упражнения

1. Записать в виде десятичной дроби: $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{21}{80}$.
2. Записать в виде периодической дроби: $\frac{3}{13}$; $\frac{6}{17}$.
3. Выразить данную скорость в метрах в секунду:
   1) 120 м/мин; 2) 600 км/с; 3) 60 км/ч; 4) 1200 км/ч.
4. Решить уравнение:
   1) $|x-3|=15$; 2) $|7-x|=3$.
5. Решить неравенство:
   1) $|x|\geqslant 1{,}2$; 2) $|x|\geqslant -5$; 3) $|x|<-4$; 4) $|x|>2{,}6$;
   5) $|x-1|<6$; 6) $|2-x|\leqslant 3$; 7) $|5-x|\geqslant 10$; 8) $|x+8|>1$.

## Упражнения

**220.** Округлить числа последовательно до тысячных, сотых, десятых долей, единиц, десятков, сотен, тысяч: 3285,05384; 6377,00753; 1234,5336.

**221.** Округлить числа 15,75 и 317,25 до единиц с недостатком и с избытком. Найти абсолютную погрешность каждого округления.

**222.** Представить в виде десятичной дроби с точностью до 0,1 число: 1) $\frac{13}{8}$; 2) $\frac{17}{25}$; 3) $\frac{39}{129}$; 4) $\frac{11}{3}$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $\frac{19}{11}$.

**223.** Представить в виде десятичной дроби с точностью до 0,01 число: 1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{99}$; 3) $\frac{5}{19}$; 4) $1\frac{2}{3}$; 5) $2\frac{3}{11}$; 6) $5\frac{1}{14}$.

**224.** Представить в виде десятичной дроби с точностью до 0,001 число: 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{5}{13}$; 3) $2\frac{3}{11}$; 4) $7\frac{9}{14}$.

**225.** 1) Средняя скорость движения молекулы водорода при 0 °С равна 1693 м/с. Один ученик округлил это число до 1690 м/с, а другой — до 1700 м/с. Найти абсолютную погрешность каждого округления. В каком случае погрешность приближения меньше?

2) Скорость движения пассажирского поезда равна 81,37 км/ч. Машинист округлил это число до 81 км/ч, а пассажир — до 82 км/ч. Найти абсолютную погрешность каждого приближения. У кого из них погрешность приближения оказалась меньше?

$\boxed{226.}$ Олень движется со скоростью 13,8 м/с. Выразить эту скорость в километрах в час и округлить с точностью до 1 км/ч.

$\boxed{227.}$ Число $\pi \approx 3{,}141592654$ есть отношение длины окружности к её диаметру. 1) Округлить это число до миллионных, тысячных, сотых. 2) С какой точностью проведено округление, если в записи оставлено 5 цифр после запятой?

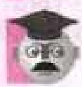
*Диалог об истории*

**Оценка точности измерений и вычислений в древности**


Профессор, а как давно людям понадобились приближённые вычисления?

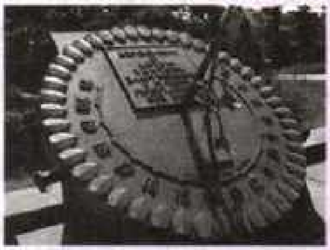

Наверное, когда люди стали делать запасы продовольствия и вынуждены были прикидывать, сколько и какой еды нужно запасти, чтобы дожить, например, до весны...


Интересно, а все ли люди раньше отличали приближённые величины от точных?


А как ты думаешь, все ли взрослые люди понимают, что, отвечая на вопрос «Каков ваш возраст?», они чаще всего дают неточный ответ? Они называют либо полное число прожитых лет, округляя с недостатком свои годы. Либо говорят: «Мне скоро будет столько-то лет», округляя тем самым количество прожитых лет до ближайшего целого числа с избытком.


Всё ясно. Думаю, что в повседневной жизни люди всегда понимают, когда они встречаются с точными, а когда с приближёнными значениями величин. Приведите, пожалуйста, ещё примеры того, как и когда в древности люди сталкивались с неточными значениями величин.

Раньше люди по солнечным часам только приблизительно определяли время дня. С давних времён люди изобретали мерные ёмкости для жидкостей и сыпучих веществ, затем с их помощью приближённо измеряли объёмы больших ёмкостей. Округляя с избытком, определяли количество шкур животных, необходимых для изготовления одежды, и т. д.



# § 14 Относительная погрешность

Для сравнения точности разных приближений одной и той же величины используется абсолютная погрешность. Если же сравниваются точности приближения различных величин, то абсолютной погрешности недостаточно. Допустим, масса арбуза равна $(3255 \pm 1)$ г, а масса слитка золота равна $(43 \pm 1)$ г. Абсолютные погрешности взвешиваний одинаковы, но очевидно, что арбуз взвешен намного точнее, чем слиток (хотя неточность при взвешивании арбуза менее значима, чем неточность при взвешивании слитка золота). Как находить и сравнивать точности приближений разных величин, вы научитесь в этом параграфе.

**Нужно вспомнить:**

- понятие абсолютной погрешности;
- понятие процента;
- нахождение процентов от числа;
- выражение в процентах отношения двух чисел;
- запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и $n$ — натуральное число;
- правило округления чисел.

Рассмотрим пример. Расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга равно $(650 \pm 1)$ км, длина карандаша равна $(21{,}3 \pm 0{,}1)$ см. Абсолютная погрешность в первом случае не больше 1 км, а во втором —

не больше 1 мм. Означает ли это, что длина карандаша измерена точнее, чем расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга?

При измерении расстояния от Москвы до Санкт-Петербурга абсолютная погрешность не превышает 1 км на 650 км, что составляет $\frac{1}{650} \cdot 100\% \approx 0{,}15\%$ измеряемой величины.

При измерении длины карандаша абсолютная погрешность не превышает 0,1 см на 21,3 см, что составляет $\frac{0{,}1}{21{,}3} \cdot 100\% \approx 0{,}47\%$ измеряемой величины.

Таким образом, расстояние между городами измерено точнее, чем длина карандаша.

Для оценки качества приближения вводится относительная погрешность.

**!** Определение. **Относительной погрешностью** называют частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближённого значения величины.

Итак, если $a$ — приближённое значение числа $x$, то абсолютная погрешность равна $|x-a|$, а относительная погрешность равна $\frac{|x-a|}{|a|}$. Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

**Задача.** Приближённое значение массы Земли равно $(5{,}98 \pm 0{,}01) \times 10^{24}$ кг. Масса пули охотничьего ружья равна $(9 \pm 1)$ г. Какое измерение является более точным?

▶ Оценим относительную погрешность каждого измерения:

1) $\frac{0{,}01 \cdot 10^{24}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} \cdot 100\% \approx 0{,}2\%$; 2) $\frac{1}{9} \cdot 100\% \approx 11\%$.

Ответ. Масса Земли измерена точнее. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Что называют относительной погрешностью приближения?
2. Знание каких погрешностей даёт возможность сравнивать точности приближения одной и той же величины; разных величин?

## Вводные упражнения

1. Округлить число 20,548 до сотых; десятых; единиц; десятков.
2. Известно, что $x = 15{,}9 \pm 1$. Найти приближённое значение $x$ с недостатком; с избытком.

3. Представить $\frac{26}{17}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,1.

4. Записать число 20 000; 3100; 8150; 72 560 в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и $n$ — натуральное число.

## Упражнения

**228.** Округлить число до единиц и найти абсолютную и относительную погрешность округления:
1) 3,45; 2) 10,59; 3) 23,263; 4) 0,892.

**229.** Найти относительную погрешность приближения:
1) числа $\frac{1}{3}$ числом 0,33; 2) числа $\frac{1}{7}$ числом 0,14.

**230.** Какое измерение точнее:
1) $a = (750 \pm 1)$ м или $b = (1,25 \pm 0,01)$ м;
2) $p = (10,6 \pm 0,1)$ с или $q = (1,25 \pm 0,01)$ с?

**231.** Одновременно различными приборами измерили температуру пара и получили в первом случае $t = (104 \pm 1)$ °С, во втором $t = (103,8 \pm 0,1)$ °С, в третьем $t = (103,86 \pm 0,01)$ °С. Оценить относительную погрешность каждого измерения.

**232.** Двое учащихся, выполняя практическую работу на измерение длин отрезков, в результате получили $(203 \pm 1)$ мм и $(120 \pm 1)$ см. Какой из учащихся выполнил работу качественнее?

**233.** 1) Приближённое значение числа $x$ равно $a$. Относительная погрешность этого приближения равна 0,01. Найти абсолютную погрешность, если $a = 2,71$.
2) Приближённое значение числа $x$ равно $b$. Относительная погрешность этого приближения равна 0,001. Найти абсолютную погрешность, если $b = 0,398$.

**234.** Масса Солнца $(2 \pm 0,1) \cdot 10^{33}$ г. Масса детского мяча $(2,5 \pm \pm 0,1) \cdot 10^2$ г. Какое измерение более точное?

**$\boxed{235.}$** Выполняя лабораторную работу по физике, связанную с определением удельной теплоёмкости алюминия, ученик получил 922 Дж/кг °С. Какова относительная погрешность приближения, если за точное принять табличное значение удельной теплоёмкости, равное 920 Дж/кг °С?

**$\boxed{236.}$** Приближённое значение массы Останкинской телевизионной башни $(5,5 \pm 0,1) \cdot 10^7$ кг. Масса трактора К-700 равна $(1,1 \pm \pm 0,1) \cdot 10^4$ кг. Какое измерение более точное?

Шаг вперёд

## Бесконечные суммы

Профессор, скажите, пожалуйста, есть ли ещё какие-нибудь методы или приёмы приближённых вычислений, кроме уже знакомых нам?

Конечно есть, например, в XVII в. европейские математики обосновали *теорию рядов* (бесконечных сумм), с помощью которой, в частности, стало возможно определять значения многих приближённых величин с любой наперёд заданной степенью точности.

В 1682 г. Лейбниц показал, что число $\frac{\pi}{4}$ представимо в виде бесконечной суммы $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$. Если этот ряд «оборвать» после третьего числа, то $\frac{\pi}{4}\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{15-5+3}{15}=\frac{13}{15}$, откуда $\pi\approx\frac{52}{15}\approx 3{,}47$.

Попробую «оборвать» ряд после четвёртого слагаемого. Найду новое приближение числа $\pi$ и сравню его с тем значением, которое мне показывает микрокалькулятор: 3,1415927. Интересно, сколько членов ряда нужно взять, чтобы относительная погрешность приближения стала меньше 1%?

Если захочешь, сам ответишь на этот вопрос. Только учти, что микрокалькулятор тоже показывает приближённое значение числа $\pi$, но с большой точностью.

# § 15 Практические приёмы приближённых вычислений

По записи приближённого числа в стандартном виде легко судить о том, каким цифрам числа можно «доверять». В этом параграфе будет дано обобщённое определение стандартного вида числа. Вы научитесь выполнять действия с приближёнными значениями и оценивать точность результатов.

**Нужно вспомнить:**

- свойства степени;
- правило округления чисел;
- понятия абсолютной и относительной погрешностей;
- действия почленного сложения и умножения неравенств.

## 1. Стандартный вид числа.

В алгебре приняты следующие обозначения:

$$10^0=1,\quad 10^{-1}=\frac{1}{10},\quad 10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100},$$

$$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000},\quad \dots,\quad 10^{-n}=\frac{1}{10^n},$$

где $n$ — натуральное число.

С помощью этих обозначений можно одну и ту же положительную десятичную дробь представить по-разному. Например:

$$0{,}0023=0{,}023\cdot\frac{1}{10}=0{,}023\cdot10^{-1};$$

$$0{,}0023=0{,}23\cdot\frac{1}{100}=0{,}23\cdot10^{-2};$$

$$0{,}0023=2{,}3\cdot\frac{1}{1000}=2{,}3\cdot10^{-3}.$$

**!** Определение. Пусть $c$ — натуральное число или положительная конечная десятичная дробь, тогда представление этого числа в виде

$$c=a\cdot10^k,\tag{1}$$

где $1\leqslant a<10$, $k$ — целое число, называют записью числа $c$ **в стандартном виде**. При этом число $k$ называют **порядком** числа $c$.

Например, порядок числа $324=3{,}24\cdot10^2$ равен 2; порядок числа $0{,}0073=7{,}3\cdot10^{-3}$ равен $-3$; порядок числа $6{,}8=6{,}8\cdot10^0$ равен 0. При решении многих теоретических и практических задач (особенно при оценке, сравнении результатов вычислений и измерений) важно знать порядок используемых чисел.

## 2. Верные и сомнительные цифры.

Результаты вычислений и измерений (которые являются приближёнными значениями) обычно записывают в виде десятичных дробей.

Цифру какого-либо разряда в записи приближённого значения называют **верной**, если граница абсолютной погрешности не превосходит единицы этого разряда. В противном случае цифру называют **сомнительной**.

Если граница абсолютной погрешности не превосходит половины единицы разряда, следующего за разрядом рассматриваемой цифры, то эту цифру в записи приближённого значения числа называют **строго верной**. Отсюда следует, что если цифра в записи числа является строго верной, то она является и верной.

Например, если $x = 4{,}056 \pm 0{,}0005$, то все цифры в записи приближённого значения 4,056 будут строго верными, так как граница абсолютной погрешности (т. е. число 0,0005) не превосходит половины единицы последнего разряда числа 4,056, т. е. не превосходит 0,001.

Так как $0{,}0005 < 0{,}001$, то можно записать, что $x = 4{,}056 \pm 0{,}001$. В этой записи число 0,001 — граница абсолютной погрешности, при этом в приближённом значении 4,056 все цифры верные.

**Задача 1.** Пусть $x = 5{,}43 \pm 0{,}02$. Найти верные и сомнительные цифры приближённого значения 5,43.

▶ Так как $0{,}02 > 0{,}01$, где 0,01 — единица последнего разряда приближённого значения 5,43, то цифра 3 сомнительная. Но уже $0{,}02 \leqslant 0{,}1$ и $0{,}02 \leqslant 1$, поэтому цифры 4 и 5 верные. ◁

Приближённые значения принято записывать таким образом, чтобы в их записи все цифры были верными. Заметим, что сформулированное в § 13 правило округления чисел даёт запись приближённых значений, все цифры которых строго верные. Запись вида $x \approx a$ после применения правил округления говорит о том, что в приближённом значении $a$ числа $x$ все цифры строго верные (а значит, и просто верные).

Например, запись $x \approx 5{,}6$ означает, что $x = 5{,}6 \pm 0{,}05$; запись $x \approx 5{,}60$ означает, что $x = 5{,}60 \pm 0{,}005$; запись $x \approx 560$ означает, что $x = 560 \pm 0{,}5$. Приближённое равенство $x \approx 560$ (т. е. $x = 560 \pm 1$) можно записать в виде $x \approx 5{,}60 \cdot 10^2$, чтобы подчеркнуть, что последняя цифра 0 в приближённом значении верная.

Если же $x = 560 \pm 10$, то верными являются только цифры 5 и 6, а последняя цифра 0 сомнительная. Поэтому в данном случае приближённое значение 560 записывают в стандартном виде так: $x \approx 5{,}6 \cdot 10^2$.

### 3. Сложение и вычитание приближённых значений.

**ТЕОРЕМА** Границы абсолютных погрешностей суммы и разности приближённых значений равны сумме границ абсолютных погрешностей каждого из приближений.

● Пусть

$$x = a \pm h_1, \;\; y = b \pm h_2, \tag{2}$$

где $h_1$ и $h_2$ — границы абсолютных погрешностей чисел $a$ и $b$ соответственно. Записи (2) означают, что справедливы двойные неравенства:

$$-h_1 \leqslant x - a \leqslant h_1, \;\; -h_2 \leqslant y - b \leqslant h_2. \tag{3}$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$-(h_1+h_2)\leqslant(x+y)-(a+b)\leqslant h_1+h_2,$$

откуда

$$x+y=(a+b)\pm(h_1+h_2). \qquad (4)$$

Запись (4) означает, что $h_1+h_2$ — граница абсолютной погрешности суммы приближённых значений.

Для оценки разности приближённых значений второе из неравенств (3) умножим на $-1$ и сложим с первым из неравенств, т. е. сложим неравенства $-h_1\leqslant x-a\leqslant h_1$ и $-h_2\leqslant b-y\leqslant h_2$. В результате получим неравенство $-(h_1+h_2)\leqslant(x-y)-(a-b)\leqslant(h_1+h_2)$, откуда

$$x-y=(a-b)\pm(h_1+h_2). \qquad (5)$$

Запись (5) означает, что $h_1+h_2$ является границей абсолютной погрешности и разности приближённых значений чисел $a$ и $b$. ○

**Задача 2.** Пусть все цифры в записях приближённых значений $x\approx 25{,}3$, $y\approx 7{,}4$ строго верные. Найти $x+y$ и $x-y$ с точностью до верных десятичных знаков.

▶ По условию $x=25{,}3\pm0{,}05$, $y=7{,}4\pm0{,}05$. По формулам (4) и (5) сложения и вычитания приближённых значений получаем $x+y=32{,}7\pm0{,}1$ и $x-y=17{,}9\pm0{,}1$.

Все цифры в полученных приближённых значениях являются верными, поэтому можно записать так: $x+y\approx 32{,}7$, $x-y\approx 17{,}9$.

Ответ. 32,7; 17,9. ◁

**Задача 3.** Пусть все цифры приближённых значений $x\approx 25{,}3$, $y\approx 7{,}418$ строго верные. Найти $x+y$ и $x-y$ с точностью до верных десятичных знаков.

▶ По условию $x=25{,}3\pm0{,}05$, $y=7{,}418\pm0{,}0005$. По формулам (4) и (5) сложения и вычитания приближённых значений получаем $x+y=32{,}718\pm0{,}0505$, $x-y=17{,}882\pm0{,}0505$.

В полученных приближённых значениях суммы и разности два последних десятичных знака — сомнительные цифры. После округления с точностью до верных десятичных знаков имеем $x+y\approx 32{,}7$, $x-y\approx 17{,}9$.

Ответ. 32,7; 17,9. ◁

Заметим, что в задаче **3** приближённые значения суммы и разности такие же, как и в задаче **2**, хотя приближённое значение $y$ в задаче **3** давалось с большей точностью.

При нахождении суммы и разности приближённых значений пользуются следующим правилом 1:

При сложении и вычитании приближённых значений, в записи которых все цифры верные, в сумме и в разности оставляют столько десятичных знаков, сколько их имеет приближённое значение с наименьшим числом десятичных знаков.

Заметим, что во многих случаях полученные таким образом десятичные знаки будут не только верными, но и строго верными.

**Задача 4.** Найти $x+y$, если $x \approx 2{,}64 \cdot 10^6$, $y = 7{,}37 \cdot 10^5$.

▶ Чтобы результат сложения получить в стандартном виде, выполним следующие преобразования:

$$x+y \approx 2{,}64 \cdot 10^6 + 7{,}37 \cdot 10^5 = 2{,}64 \cdot 10^6 + 7{,}37 \cdot \frac{10^6}{10} =$$

$$= \left(2{,}64 + \frac{7{,}37}{10}\right) \cdot 10^6 = (2{,}\underline{64} + 0{,}737) \cdot 10^6 = 3{,}377 \cdot 10^6 \approx 3{,}\underline{38} \cdot 10^6. \triangleleft$$

## 4. Умножение и деление приближённых значений.

При умножении и делении приближённых значений пользуются понятием значащей цифры.

**Значащими цифрами** называются все верные цифры в десятичной записи приближённого значения, кроме нулей, стоящих перед первой отличной от нуля цифрой.

Например, приближённые значения 0,00321; 120; 0,0760 имеют по три значащих цифры; а в числах 36,23 и 206,30 все цифры значащие.

Если положительные целые числа или конечные десятичные дроби $c$ записаны в стандартном виде, т. е. в виде $c = a \cdot 10^k$, где $1 \leqslant a < 10$, то все цифры числа $a$ будут значащими.

Например, числа $8{,}03 \cdot 10^{-5}$ и $2{,}70 \cdot 10^6$ имеют по три значащие цифры. С помощью понятия относительной погрешности можно обосновать правило 2, которым пользуются в практической работе:

При умножении и делении приближённых значений в произведении и частном оставляют столько цифр (не считая нулей, стоящих перед первой отличной от нуля цифрой), сколько значащих цифр имеет приближённое значение с меньшим числом значащих цифр.

Руководствуясь этим правилом, в результате умножения или деления приближённых значений получают все верные цифры (возможно, за исключением последней).

При выполнении умножения или деления двух приближений разумно округлить приближённое значение с бóльшим числом значащих цифр, оставив в нём на одну значащую цифру больше, чем их имеется в приближённом значении с меньшим числом значащих цифр.

**Задача 5.** Найти $xy$, если $x \approx 0{,}69$, $y \approx 2{,}3857$.

▶ Округлив второй множитель до трёх значащих цифр, получим $2{,}3857 \approx 2{,}39$. Найдём произведение $xy$ и результат округлим до двух значащих цифр: $xy \approx 0{,}69 \cdot 2{,}39 = 1{,}6491 \approx 1{,}6$. ◁

**Задача 6.** Найти $x : y$, если $x \approx 3{,}20 \cdot 10^5$, а $y \approx 6{,}17865 \cdot 10^2$.

▶ Округлив делитель до четырёх значащих цифр, получим $6{,}17865 \cdot 10^2 \approx 6{,}179 \cdot 10^2$. Найдём частное $x : y$ и результат округлим до трёх значащих цифр:

$$x : y \approx 3{,}20 \cdot 10^5 : (6{,}179 \cdot 10^2) = (3{,}20 : 6{,}179) \cdot (10^5 : 10^2) \approx$$
$$\approx 0{,}51788 \cdot 10^3 \approx 5{,}18 \cdot 10^2. \ ◁$$

## Устные вопросы и задания

1. Что называют записью числа в стандартном виде?
2. Что такое порядок числа?
3. Какие цифры в записи приближённых чисел называют верными; строго верными; сомнительными?
4. Сформулировать теорему о границах абсолютной погрешности суммы и разности приближённых значений.
5. Сформулировать правило сложения и вычитания приближённых значений.
6. Что называют значащими цифрами в десятичной записи приближённого значения?
7. Назвать число значащих цифр в приближённом значении 0,0812; 0,0030; 1043; 540; $2{,}08 \cdot 10^{-3}$; $3{,}180 \cdot 10^5$.
8. Сформулировать правило умножения и деления приближённых значений.

## Вводные упражнения

1. Записать число 5600; 1 030 000; 10; 30 876 в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и $n$ — натуральное число.
2. Записать в виде двойного неравенства:

   1) $x = 15 \pm 0{,}5$; 2) $y = 348 \pm 1$; 3) $z = 1{,}78 \pm 0{,}02$; 4) $x = 0{,}36 \pm 0{,}005$.
3. Округлить до сотых: 0,3856; 2,544; 34,203; 7,7409.
4. Представить в виде десятичной дроби с точностью до 0,01:

$$\frac{2}{7};\ \frac{1}{6};\ \frac{8}{9};\ \frac{3}{7}.$$

## Упражнения

**237.** (Устно.) Определить порядок числа, выражающего значение физической константы:

1) масса покоя электрона $m_e = 9{,}1093897 \cdot 10^{-31}$ кг;

2) постоянная Авогадро $N_A = 6{,}0221367 \cdot 10^{23}$ 1/моль;

3) постоянная Планка $h = 6{,}6260755 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

**238.** Записать в стандартном виде и определить порядок числа $k$, выражающего физическую константу:

1) отношение массы протона к массе электрона $m_p : m_e = 1836{,}152701$;

2) постоянная Фарадея $F = 96485{,}309$ Кл/моль;

3) постоянная Лошмидта $n_0 = 2686763 \cdot 10^{31}$ 1/м$^3$;

4) классический радиус электрона $r_e = 281794092 \cdot 10^{-7}$ м.

**239.** С помощью записи вида $x = a \pm h$ найти верные и сомнительные цифры приближённого значения $a$, если:

1) $x = 2{,}85 \pm 0{,}03$;  2) $x = 6{,}07 \pm 0{,}02$;

3) $x = 302{,}48 \pm 0{,}01$;  4) $x = 29{,}35 + 0{,}01$;

5) $x = 72{,}6192 \pm 0{,}0005$;  6) $x = 501{,}363 \pm 0{,}0005$;

7) $x = 4{,}3401 \pm 0{,}00005$;  8) $x = 2{,}8213 \pm 0{,}00005$.

**240.** Условие вида $x \approx a$ (в записи $a$ все цифры верные) записать в виде $x = a \pm h$, если:

1) $x \approx 3{,}8$;  2) $x \approx 2{,}7$;  3) $x \approx 5{,}90$;  4) $x \approx 4{,}3204$;

5) $x \approx 2700$;  6) $x \approx 350$;  7) $x \approx 5{,}3 \cdot 10^2$;  8) $x \approx 2{,}4 \cdot 10^3$.

**241.** В записи приближённых значений чисел $x$ и $y$ все цифры являются строго верными. Найти $x + y$ и $x - y$ с точностью до верных десятичных знаков, если:

1) $x \approx 2{,}8$, $y \approx 3{,}5$;  2) $x \approx 7{,}9$, $y \approx 3{,}4$;

3) $x \approx 56{,}31$, $y \approx 17{,}29$;  4) $x \approx 39{,}23$, $y \approx 26{,}47$;

5) $x \approx 7{,}25$, $y \approx 2{,}9$;  6) $x \approx 5{,}64$, $y \approx 3{,}8$.

**242.** С помощью правила 1 найти приближённые значения $x + y$ и $x - y$, если:

1) $x \approx 3{,}3$, $y \approx 2{,}28$;  2) $x \approx 5{,}29$, $y \approx 1{,}6$;

3) $x \approx 5{,}047$, $y \approx 3{,}1$;  4) $x \approx 8{,}8$, $y \approx 6{,}349$.

**243.** С помощью правила 2 найти приближённые значения $x \cdot y$ и $x : y$, если:

1) $x \approx 2{,}35$, $y \approx 1{,}2$;  2) $x \approx 3{,}48$, $y \approx 1{,}3$;  3) $x \approx 1234$, $y \approx 5{,}1$.

**244.** Найти приближённые значения $x+y$ и $x-y$, если:

1) $x \approx 3{,}2 \cdot 10^3$, $y \approx 2{,}345 \cdot 10^2$; 2) $x \approx 7{,}407 \cdot 10^2$, $y \approx 3{,}4 \cdot 10^2$;

3) $x \approx 2{,}0 \cdot 10^2$, $y \approx 1{,}62 \cdot 10^2$; 4) $x \approx 4{,}10 \cdot 10^3$, $y \approx 1{,}23 \cdot 10^3$;

5) $x \approx 107$, $y \approx 2{,}3$; 6) $x \approx 121$, $y \approx 56{,}3$.

**245.** Найти приближённые значения $x \cdot y$ и $x : y$, если:

1) $x \approx 0{,}35$, $y \approx 25{,}01$; 2) $x \approx 0{,}021$, $y \approx 32{,}54$;

3) $x \approx 1{,}6 \cdot 10^5$, $y \approx 1{,}402 \cdot 10^5$; 4) $x \approx 2{,}1 \cdot 10^4$, $y \approx 1{,}325 \cdot 10^4$;

5) $x \approx 2{,}30 \cdot 10^{-2}$, $y \approx 1{,}123 \cdot 10^{-2}$;

6) $x \approx 1{,}820 \cdot 10^{-1}$, $y \approx 1{,}0362 \cdot 10^{-1}$.

*Диалог об истории*

### Вклад русских учёных в теорию приближённых вычислений

Профессор, а кто и когда придумал правила приближённых вычислений?

Люди давно выполняют действия с приближёнными числами. А теория приближённых вычислений появилась сравнительно недавно. И существенный вклад в эту теорию внесли отечественные учёные. Так, знаменитый русский математик и механик-кораблестроитель *Алексей Николаевич Крылов (1863—1945)* в 1942 г. написал, что вычисление должно производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, причём всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра — половину ошибки. Им была создана строгая теория приближённых вычислений, в которой содержится правило, позволяющее по записи приближённого значения числа судить о степени его точности.

А. Н. Крылов

В. М. Брадис

Вашим родителям, дедушкам и бабушкам хорошо известно имя педагога-математика *Владимира Модестовича Брадиса (1890—1975)*. Созданные им в 1921 г. вычислительные четырёхзначные таблицы были незаменимы на уроках математики до восьмидесятых годов XX в. Им на смену пришли сначала логарифмическая линейка, а затем — микрокалькулятор.

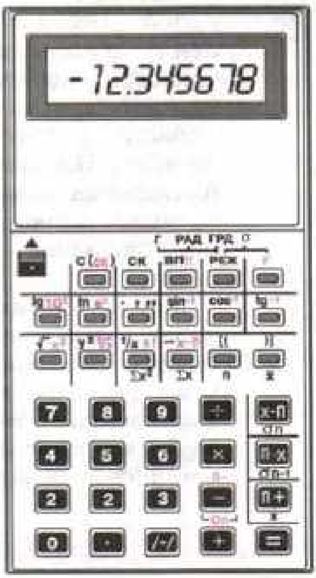
## § 16 Простейшие вычисления на микрокалькуляторе

Многие из вас часто используют микрокалькулятор на уроках математики, физики и химии для нахождения результатов простейших вычислений. Однако, например, при делении числа 38 на 13 и видя на экране частное 2.923076923077, многие не знают — сколько цифр записать в ответ.
В этом параграфе вы познакомитесь с возможностями инженерного калькулятора, имеющего функцию нахождения степени числа и многие другие функции. Научитесь после применения калькулятора записывать результат вычисления с необходимой степенью точности.

**Нужно вспомнить:**

- понятие значащей цифры;
- правила округления чисел;
- запись приближённых чисел с заданной степенью точности;
- формулы нахождения площади прямоугольника и массы тела при заданных объёме и плотности вещества.

**Микрокалькулятор** (сокращённо МК) — это простейшая электронно-вычислительная машина (ЭВМ) небольших размеров, предназначенная для выполнения различных математических операций: арифметических действий над числами, нахождения степеней чисел, вычисления значений различных функций и т. д. Микрокалькуляторами часто пользуются студенты, инженеры, техники, экономисты, бухгалтеры и другие специалисты в своей повседневной работе.




На рисунке изображена передняя панель одной из моделей отечественного инженерного микрокалькулятора. В её верхней части расположен индикатор (табло), в нижней — клавиатура. На табло имеется разрядная сетка (в данной модели — из девяти позиций) для изображения чисел. Похожие панели имеют многие инженерные микрокалькуляторы.

При включении МК высвечиваются на табло: число 0; символ годности элемента питания; буква «Г», показывающая, что в этом режиме работы микрокалькулятора вычисления с величинами углов выполняются в градусной мере.

Далее будут продемонстрированы приёмы вычислений с помощью инженерного МК. Однако, используя определённую модель МК, необходимо прежде всего познакомиться с инструкцией по работе с этой моделью (последовательности нажатия клавиши для достижения одного и того же результата у разных моделей МК могут быть различными).

### 1. Выполнение арифметических действий.

Чтобы выполнить арифметическую операцию над числами $a$ и $b$, нужно:

1) ввести число $a$;
2) нажать клавишу требуемой операции;
3) ввести число $b$;
4) нажать клавишу $\boxed{=}$.

После этого на табло высветится результат.

Например, умножение производится по программе

$$a \boxed{\times} b \boxed{=}.$$

При $a=4{,}32$, $b=9{,}5$ получаем следующую программу вычислений:

$$\boxed{4}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{9}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{=}.$$

Решение подобных примеров кратко будем записывать так:

$$4{,}32 \boxed{\times} 9{,}5 \boxed{=} \underline{41{,}04}.$$

В такой краткой записи не приводится программа ввода данных чисел, а появившийся на табло результат вычислений записывается справа и подчёркивается.

**Задача 1.** Найти сумму $25{,}147+3{,}22$.

► $25{,}147 \boxed{+} 3{,}22 \boxed{=} \underline{28{,}367}$. ◁

**Задача 2.** Найти разность $198{,}023-74{,}986$.

► $198{,}023 \boxed{-} 74{,}986 \boxed{=} \underline{123{,}037}$. ◁

**Задача 3.** Вычислить $-25637-49801$.

► $25637 \boxed{/-/} \boxed{-} 49801 \boxed{=} -\underline{75438}$. ◁

**Задача 4.** Найти частное $4319{,}4:93{,}9$.

► $4319{,}4 \boxed{\div} 93{,}9 \boxed{=} \underline{46}$. ◁

**Задача 5.** Найти произведение $25{,}4395 \cdot 4{,}353$.

▶ $25{,}4395\ \boxed{\times}\ 4{,}353\ \boxed{=}\ \underline{110{,}73814}$. ◁

Появившийся на табло результат вычислений является приближённым значением произведения. Точный ответ 110,7381435 содержит 10 цифр, а на табло большинства микрокалькуляторов помещается не более восьми цифр. В этом случае микрокалькулятор автоматически осуществляет округление до восьми цифр.

При решении практических задач, как правило, достаточно получить 3—4 первые значащие цифры. Поэтому результат вычислений обычно округляют с требуемой точностью.

**Задача 6.** Найти частное $25:13$ с точностью до 0,01.

▶ $25\ \boxed{\div}\ 13\ \boxed{=}\ \underline{1{,}9230769}$. Округляя до 0,01, получаем 1,92. ◁

**Задача 7.** Найти произведение $ab$, если $a \approx 35{,}28$, $b = 7{,}31$.

▶ С помощью МК находим $35{,}28 \cdot 7{,}31 = 257{,}8968$. Согласно правилу 2 (см. § 15) результат округляем до трёх значащих цифр, получим $ab \approx 258$. ◁

Если на МК попытаться выполнить невозможную операцию, например деление на нуль, то на табло высветится буква «E» (первая буква английского слова **error** — ошибка) либо **error**.

## Устные вопросы и задания

1. Сформулировать признаки делимости на 2; 3; 4; 5; 9.
2. Определить, конечной или бесконечной периодической дробью является результат деления:

   1) 2591 на 23; 2) 947 на 16;

   3) 63 339 на 6; 4) 111 111 на 15.

## Вводные упражнения

1. Округлить до тысячных число 38,2945; 4,1854; 5,74009; 17,0699.
2. Известно, что в записях приближённых значений чисел $x$ и $y$ все цифры строго верные. Найти $x+y$ и $x-y$ с точностью до верных десятичных знаков:

   1) $x \approx 25{,}48$, $y \approx 9{,}39$; 2) $x \approx 1{,}261$, $y \approx 0{,}139$;

   3) $x \approx 5{,}6$, $y \approx 3{,}259$; 4) $x \approx 9{,}542$, $y \approx 7{,}06$.

3. Найти $x + y$, если:

1) $x \approx 5{,}7 \cdot 10^8$, $y \approx 6{,}85 \cdot 10^8$;  2) $x \approx 7{,}24 \cdot 10^7$, $y \approx 9 \cdot 10^8$.

4. Найти $x \cdot y$, если:

1) $x \approx 0{,}38$, $y \approx 5{,}61$;  2) $x \approx 1{,}03$, $y \approx 35$;

3) $x \approx 7{,}3 \cdot 10^3$, $y \approx 1{,}28 \cdot 10^3$;  4) $x \approx 5{,}84 \cdot 10^{-2}$, $y \approx 3{,}2 \cdot 10^{-2}$.

## Упражнения

Ввести в микрокалькулятор число (**246—248**).

**246.** 1) 326;  2) 108;  3) 5601;  4) 7060.

**247.** 1) 32,4;  2) 8,45;  3) 0,104;  4) 0,2903.

**248.** 1) –834;  2) –725;  3) –1,032;  4) –5,409.

**249.** Найти сумму:

1) $32{,}405 + 1{,}024$;  2) $3{,}104 + 21{,}98$;

3) $3{,}74809 + 2{,}34705$;  4) $981{,}504 + 3021{,}457$.

**250.** Найти разность:

1) $73{,}54 - 21{,}012$;  2) $81{,}032 - 59{,}807$;

3) $421{,}53 - 627{,}3$;  4) $2{,}5894 - 13{,}1037$.

**251.** Вычислить:

1) $-9843 - 7025$;  2) $-10\,134 - 543\,210$;

3) $-35{,}287 - 563{,}14$;  4) $-6845{,}1 - 320{,}02$.

**252.** Найти произведение:

1) $341{,}7 \cdot 13{,}4$;  2) $74{,}53 \cdot 14{,}2$;

3) $3{,}795 \cdot 78{,}6$;  4) $86{,}5 \cdot 6{,}302$.

**253.** Найти частное:

1) $8748 : 27$;  2) $22\,506 : 31$;

3) $13{,}3974 : 8{,}27$;  4) $31{,}284 : 6{,}32$.

**254.** Найти произведение с точностью до 0,01:

1) $4{,}31 \cdot 28{,}37$;  2) $56{,}78 \cdot 2{,}3404$;

3) $507{,}63 \cdot 4{,}2102$;  4) $2{,}3171 \cdot 508{,}13$.

**255.** Найти частное с точностью до 0,001:

1) $341 : 23{,}5$;  2) $724 : 51{,}7$;  3) $6{,}135 : 2{,}3$;  4) $14{,}38 : 5{,}5$.

**256.** Плотность ртути 13,6 г/см$^3$. Какова масса ртути, заполнившей сосуд объёмом 11,3 см$^3$?

**257.** Найти объём сосуда, заполненного углекислым газом массой 9,35 кг, если плотность углекислого газа равна 1,98 кг/м³.

**258.** Размеры заготовки прямоугольного сечения равны 35,15 мм и 40,23 мм. Найти площадь сечения заготовки. Округлить результат до 0,01 мм².

**259.** Упростить выражение и найти его числовое значение с точностью до 0,01:

1) $n-(1+n^2):(n-1)$ при $n=-0{,}37$;

2) $\left(\frac{n}{3}-\frac{n}{3+n}\right)\cdot\frac{3}{n}$ при $n=-1{,}647$.

**260.** Найти с точностью до 0,1 значения функции $y=7{,}3x$ при $x=-2{,}1$; 0,8; 1,7; 2,5.

Диалог об истории

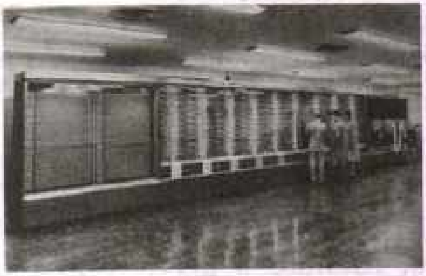
**Вычислительные машины**

Профессор, наверное, когда Вы были школьником, ещё не было микрокалькуляторов и тем более персональных компьютеров?

Да, в наше время в школе на уроках математики в младших классах обучали работать на *счётах*, а в старших классах мы осваивали *логарифмическую линейку* и *таблицы В. М. Брадиса*. С их помощью упрощали громоздкие расчёты. Учились округлять числа и записывать результат вычислений. Современным школьникам намного легче делать разные вычисления, имея под рукой калькулятор — маленькую ЭВМ.

А когда появились первые ЭВМ?

Появление первых ЭВМ обязано трёхвековой истории изобретения разных вычислительных машин, создававшихся *Б. Паскалем, Г. В. Лейбницем, Чарльзом Беббиджем (1791—1871)* и др. Первая счётная машина, использующая электрическое реле, была создана в 1888 г. американцем немецкого происхождения *Германом Холлеритом (1860—1929)*. Она называлась табулятором и была апробирована при переписи населения в США.



Первые проекты ЭВМ появились к концу 20-х гг. XX в., после изобретения двух- и трёхэлектродных электронных ламп (диодов и триодов), а также электронного реле. А первой ЭВМ принято считать машину ЭНИАК, разработанную в Пенсильванском университете США. Первой отечественной ЭВМ была небольшая электронная счётная машина МЭСМ, созданная в 1947—1951 гг. под руководством академика *Сергея Алексеевича Лебедева (1902—1974)*.

Интересно, а как быстро могла считать счётная машина МЭСМ?

МЭСМ выполняла только 12 команд, а её «быстродействие» было 50 операций в секунду. Для сравнения хочу сказать, что машины следующих поколений работали намного быстрее. Так, ЭВМ середины 70-х гг. XX в. могли уже выполнять $10^8$ операций в секунду. А суперкомпьютер, созданный в 2009 г. в МГУ им. М. В. Ломоносова, может выполнять $4{,}2 \cdot 10^{14}$ операций в секунду.

Г. Холлерит

Персональные компьютеры, которые есть теперь в каждой школе и у многих людей дома, — это небольшие по размеру ЭВМ, создаваемые на базе микропроцессора, т. е. на основе одной или нескольких интегральных схем. Ну а по поводу того, как пользоваться персональным компьютером, думаю, что вы и ваши друзья знаете уже не хуже меня. Добавлю лишь, что изобретение ЭВМ дало толчок развитию *вычислительной математики*, которая выделилась в самостоятельную область знаний. По всей стране в учебных институтах открылись новые специальности, связанные с вопросами вычислительной математики и кибернетики. Специалисты в этой области решают сложные практические, инженерные, экономические, оборонные задачи. Выполняемые ими расчёты становятся всё более точными.

С. А. Лебедев

Кстати, академик *Андрей Николаевич Тихонов (1906—1993)*, который являлся научным редактором первых изданий этого учебника, создал факультет ВМиК (вычислительной математики и кибернетики) в МГУ.

А. Н. Тихонов

# § 17 Действия с числами, записанными в стандартном виде

В этом параграфе будет показано, как с помощью инженерного микрокалькулятора производить действия с числами, записанными в стандартном виде.

**Нужно вспомнить:**

- правило округления числа с заданной точностью;
- запись положительного числа в стандартном виде;
- определение порядка числа;
- свойства степеней;
- формулы сокращённого умножения;
- действия с алгебраическими дробями.

Многие инженерные МК (имеющие 9 позиций в разрядной сетке) позволяют оперировать с числами, записанными в десятичной форме, если эти числа и результаты операций не превышают 99999999. Для того чтобы можно было выполнять действия с большими числами, используют запись чисел в стандартном виде.

В инструкциях по эксплуатации микрокалькуляторов при записи числа в стандартном виде $a \cdot 10^n$ (где $1 \leqslant |a| < 10$) число $a$ называют **мантиссой**, а целое число $n$ — **порядком** числа.

Например:

1) $275 = 2{,}75 \cdot 10^2$; здесь 2,75 — мантисса числа 275, а 2 — его порядок;

2) $-2753 = -2{,}753 \cdot 10^3$; здесь $-2{,}753$ — мантисса числа $-2753$, а 3 — его порядок;

3) $0{,}27 = 2{,}7 \cdot \frac{1}{10} = 2{,}7 \cdot 10^{-1}$; здесь 2,7 — мантисса числа 0,27; $-1$ — его порядок;

4) $-0{,}0275 = -2{,}75 \cdot \frac{1}{100} = -2{,}75 \cdot 10^{-2}$; здесь $-2{,}75$ — мантисса числа $-0{,}0275$; $-2$ — его порядок.

Покажем на примерах, как на табло некоторых МК изображается стандартный вид числа.

1) Число $-8{,}31 \cdot 10^{-7}$ изображается так:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | – | 8. | 3 | 1 | – | 0 | 7 |

мантисса числа — порядок числа

2) Число $5{,}3894 \cdot 10^{21}$ изображается так:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5. | 3 | 8 | 9 | 4 | | 2 | 1 |

мантисса числа — порядок числа

Обратите внимание: при изображении на табло числа в стандартном виде третья справа ячейка предназначена для знака порядка числа, причём знак «+», как и в обычной записи показателя степени, не пишется (пример 2).

Стандартный вид числа на табло распознаётся следующим образом: если третья справа ячейка либо пустая, либо в ней записан знак «–», а слева от этой ячейки записано некоторое число $a$, такое, что $1 \leqslant |a| < 10$, то на табло изображено число в стандартном виде.

Посмотрите, как с помощью клавиши $\boxed{\text{ВП}}$ (ввод порядка) вводятся в МК числа, записанные в стандартном виде.

**Задача 1.** Ввести число $4{,}935 \cdot 10^{23}$.

► Программа ввода такова: 4,935 $\boxed{\text{ВП}}$ 23. На табло получается

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 4. | 9 | 3 | 5 | | 2 | 3 |

◁

**Задача 2.** Ввести число $-2{,}59 \cdot 10^{-3}$.

► Программа ввода такова: 2,59 $\boxed{/-/}$ $\boxed{\text{ВП}}$ 3 $\boxed{/-/}$ На табло получается

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | – | 2. | 5 | 9 | – | 0 | 3 |

◁

Таким образом, для введения в МК числа, записанного в стандартном виде, нужно:

1) ввести мантиссу числа;
2) нажать клавишу ввода порядка числа $\boxed{\text{ВП}}$;
3) ввести порядок числа.

При этом для изображённого числа на табло МК (имеющего 9 позиций в разрядной сетке) первые слева шесть ячеек отводятся для мантиссы числа, а последние три — для его порядка. Поэтому число, записанное в стандартном виде, можно ввести в МК только тогда, когда его мантисса содержит не более шести цифр, если она положительна, и не более пяти цифр, если она отрицательна; его порядок содержит не более двух цифр.

При этом действия над числами, записанными в стандартном виде, выполняются так же, как и над числами, записанными в обычном виде.

**Задача 3.** Найти произведение $3{,}56 \cdot 10^{14} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{7}$.

► 3,56 $\boxed{\text{ВП}}$ 14 $\boxed{\times}$ 5,8 $\boxed{\text{ВП}}$ 7 $\boxed{=}$ $\underline{2{,}0648 \cdot 10^{22}}$. ◁

**Задача 4.** Найти произведение $0{,}024 \cdot 0{,}032$.

► 0,024 $\boxed{\times}$ 0,032 $\boxed{=}$ $\underline{7{,}68 \cdot 10^{-4}}$. ◁

Всегда, как и в этой задаче, если в промежуточном или окончательном результате вычислений получается число, модуль которого меньше 0,01, то это число появляется на табло МК в стандартном виде.

**Задача 5.** Найти частное $(7{,}83 \cdot 10^{9}) : (3{,}4 \cdot 10^{12})$.

► 7,83 $\boxed{\text{ВП}}$ 9 $\boxed{\div}$ 3,4 $\boxed{\text{ВП}}$ 12 $\boxed{=}$ $\underline{2{,}30294 \cdot 10^{-3}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-3}$. ◁

При решении этой задачи МК автоматически округлил мантиссу результата, сохранив её первые шесть цифр. Затем было произведено округление результата до двух значащих цифр.

**Задача 6.** Найти сумму $89000 + 7{,}35 \cdot 10^{8}$.

► 89000 $\boxed{+}$ 7,35 $\boxed{\text{ВП}}$ 8 $\boxed{=}$ $\underline{7{,}35089 \cdot 10^{8}}$. ◁

**Задача 7.** Найти разность $1{,}2 \cdot 10^{8} - 98300000$.

► 1,2 $\boxed{\text{ВП}}$ 8 $\boxed{-}$ 98300000 $\boxed{=}$ $\underline{21700000}$. ◁

**Задача 8.** Найти частное $(3{,}4 \cdot 10^{9}) : (1{,}7 \cdot 10^{8})$.

► 3,4 $\boxed{\text{ВП}}$ 9 $\boxed{\div}$ 1,7 $\boxed{\text{ВП}}$ 8 $\boxed{=}$ $\underline{20}$. ◁

Рассмотренные примеры показывают, что при выполнении вычислений на многих МК одни из данных чисел можно вводить в обычном виде, а другие — в стандартном. Результат вычислений может быть как точным, так и приближённым, и появляться на табло как в обычном, так и в стандартном виде.

## Устные вопросы и задания

1. Что называют мантиссой и порядком числа?
2. Где на табло МК изображается мантисса числа; порядок числа?
3. Перечислить порядок действий при введении в инженерный МК числа, записанного в стандартном виде?

## Вводные упражнения

1. Записать в стандартном виде число 3805,6; 0,045; 0,00861.
2. Выполнить действия:
   1) $10^{-8} \cdot 10^{6}$; 2) $10^{-3} \cdot 10^{-7}$; 3) $10^{5} : 10^{-6}$; 4) $10^{-3} : 10^{9}$.
3. Представить в виде произведения:
   1) $4a^2 - 9b^2$; 2) $0{,}01x^2 - \frac{16}{49}y^2$; 3) $x^2 - 6xy + 9y^2$;
   4) $25a^2 + 60ab + 36b^2$; 5) $8a^3 + b^3$; 6) $27x^3 - \frac{1}{8}y^3$.
4. Округлить с точностью до 0,01 число 2,743; 13,005; 98,996.

## Упражнения

**261.** Записать в стандартном виде число, выражающее:

1) массу атома кислорода $0{,}\underbrace{0000000000000000000000}_{22\text{ нуля}}2662$ г;

2) толщину плёнки мыльного пузыря 0,00000006 см;

3) единицу длины ангстрем (применяется в молекулярной физике) 0,0000001 см;

4) диаметр молекулы воды 0,00000003 см.

Записать число в стандартном виде, назвать его знак, мантиссу, знак порядка и порядок (**262—263**).

**262.** 1) 35,801; 2) 430,24; 3) 5,2004; 4) 3602,1;
5) 0,48352; 6) 0,068345; 7) 2 843 154; 8) 12 345 678.

**263.** 1) –0,35; 2) –23,4578; 3) –450,102; 4) –87 654 321;
5) –0,453; 6) –3,54001; 7) –6814,1234; 8) –12345,678.

**264.** Ввести в МК число:

1) $3{,}58 \cdot 10^{8}$; 2) $7{,}01 \cdot 10^{9}$; 3) $-5{,}874 \cdot 10^{-11}$; 4) $-6{,}854 \cdot 10^{-23}$.

**265.** Вычислить (результат записать в обычном виде):

1) $1{,}6524 : 3{,}24$; 2) $151{,}34 : 658$;
3) $11{,}3336 : 248$; 4) $0{,}8211 : 357$.

**266.** Найти частное с точностью до 0,001:

1) $39 : 286$; 2) $87 : 124$; 3) $1{,}7 : 58{,}3$; 4) $1{,}9 : 38{,}7$.

Вычислить на МК (**267—270**).

**267.** 1) $98\,765\,432 + 12\,345\,678$; 2) $-87\,654\,321 - 56\,789\,012$;
3) $6{,}324 \cdot 10^{-3} + 8{,}123 \cdot 10^{-2}$; 4) $5{,}729 \cdot 10^{-4} - 3{,}456 \cdot 10^{-3}$.

**268.** 1) $-98{,}765 + 5{,}43 \cdot 10^{5}$; 2) $3{,}456 \cdot 10^{4} + 5678$;
3) $85\,006\,401 + 3{,}84 \cdot 10^{8}$; 4) $98\,764\,530 + 4{,}56 \cdot 10^{8}$.

**269.** 1) $12\,340\,000 \cdot 87\,600\,000$; 2) $90\,080\,000 \cdot 20\,300\,000$;
3) $1{,}58 \cdot 10^{-3} \cdot 65$; 4) $843 \cdot 3{,}47 \cdot 10^{-2}$.

**270.** 1) $(6{,}58 \cdot 10^{24}) : (3{,}29 \cdot 10^{3})$;
2) $(7{,}41 \cdot 10^{31}) : (2{,}47 \cdot 10^{15})$;
3) $(4{,}57 \cdot 10^{51}) : (3{,}12 \cdot 10^{49})$;
4) $(8{,}31 \cdot 10^{63}) : (4{,}2 \cdot 10^{61})$.

**271.** Найти с точностью до 0,0001 г массу газа плотности $\rho$, занимающую объём $V$, если:

1) $\rho = 1{,}98 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $V = 0{,}725$ см³ (углекислый газ);
2) $\rho = 1{,}29 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $V = 1125$ см³ (воздух при 0 °C);
3) $\rho = 1{,}43 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $V = 355$ см³ (кислород);
4) $\rho = 9 \cdot 10^{-5}$ г/см³, $V = 789$ см³ (водород).

**272.** Упростить выражение и найти его числовое значение с точностью до 0,1:

1) $\left(\frac{1}{(a+3)^2} : \frac{a}{a^2-9} - \frac{a-9}{a^2-9}\right)(a-3)$ при $a = 6{,}47 \cdot 10^{-3}$;

2) $(a+2)\left(\frac{a+6}{a^2-4} - \frac{1}{a^2-4} \cdot \frac{(a+2)^2}{a}\right)$ при $a = -2{,}89 \cdot 10^{-2}$.

Диалог о полезном

**Расчёт нормы высева семян**

Профессор, в упражнениях к параграфу дана только одна задача с реальными значениями величин, записанными с помощью чисел в стандартном виде. Приведите, пожалуйста, ещё пример задачи, в которой нужно делать расчёты с очень большими или с очень маленькими числами.

Рассмотрим задачу, которую часто решают агрономы. Известно, что норма высева семян $H$ (кг/га) находится по формуле $H = \dfrac{10KL}{br}$, где $K$ (г) — крупность семян, $L$ — рекомендуемое число высеваемых зёрен на 1 га, $b$ (%) — всхожесть семян, $r$ (%) — чистота семян. Рассчитайте норму высева при $L = 6 \cdot 10^6$, $K = 4 \cdot 10^{-2}$ г, $b = 93\%$, $r = 97\%$. Для самопроверки подскажу ответ: $H \approx 266$ кг/га.

# § 18 Вычисление на микрокалькуляторе степени и числа, обратного данному

В этом параграфе вы научитесь с помощью инженерного микрокалькулятора находить натуральную степень положительного числа, а также число, обратное данному.

**Нужно вспомнить:**

- понятие степени с натуральным показателем; основания и показателя степени;
- понятия числа, обратного данному; противоположного данному;
- свойства степеней;
- нахождение приближённых значений чисел с заданной точностью;
- правило умножения многочленов;
- формулы сокращённого умножения;
- действия с алгебраическими дробями;
- порядок выполнения арифметических действий.

Для вычисления степени $y^x$ на МК нужно ввести число $y$, нажать клавишу $\boxed{y^x}$, ввести число $x$ и нажать клавишу $\boxed{=}$.

**Задача 1.** Вычислить: 1) $(2{,}57)^3$; 2) $(386)^{15}$; 3) $(2{,}5 \cdot 10^4)^8$.

► 1) 2,57 $\boxed{y^x}$ 3 = $\underline{16{,}974593}$; 2) 386 $\boxed{y^x}$ 15 = $\underline{6{,}2923 \cdot 10^{38}}$;

3) 2,5 $\boxed{\text{ВП}}$ 4 $\boxed{y^x}$ 8 = $\underline{1{,}52587 \cdot 10^{35}}$. ◁

В 9 классе вы узнаете, что выражение $y^x$ имеет смысл для любых значений $x$ только при $y > 0$. Поэтому МК не может вычислить значение $y^x$, если $y < 0$. Например, если на МК набрать программу для вычисления степени $(-2)^4$, то на табло появится сигнал ошибки — буква «Е».

$$2 \ \boxed{/-/} \ \boxed{y^x} \ 4 = \text{E}.$$

Теперь посмотрите, как с помощью клавиши $\boxed{1/x}$ на МК вычисляется число, обратное данному.

**Задача 2.** Вычислить: 1) $\frac{1}{50}$; 2) $\frac{1}{625}$; 3) $\frac{1}{27}$ с точностью до 0,001;

4) $-\frac{1}{0{,}13}$ с точностью до 0,1.

► 1) 50 $\boxed{1/x}$ $\underline{0{,}02}$; 2) 625 $\boxed{1/x}$ $\underline{1{,}6 \cdot 10^{-3}}$;

3) 27 $\boxed{1/x}$ $\underline{0{,}037037} \approx 0{,}037$;

4) 0,13 $\boxed{/-/}$ $\boxed{1/x}$ $\underline{-7{,}6923076} \approx -7{,}7$. ◁

Так как после нажатия клавиши $\boxed{1/x}$ на табло сразу появляется число, обратное данному (без нажатия клавиши $\boxed{=}$), то с этим числом можно выполнить и другие операции.

**Задача 3.** Вычислить:

1) $\frac{1}{14} + 0{,}58$; 2) $0{,}21 - \frac{1}{1{,}5}$; 3) $\frac{1}{17} + \frac{1}{21}$; 4) $\frac{1}{(0{,}34)^2}$.

► 1) 14 $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 0,58 $\boxed{=}$ $\underline{0{,}6514285}$;

2) 0,21 $\boxed{-}$ 1,5 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\underline{-0{,}4566666}$;

3) 17 $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 21 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\underline{0{,}1064425}$;

4) 0,34 $\boxed{1/x}$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{=}$ $\underline{8{,}650519}$. ◁

Вычисление значений выражения $x^2$ можно выполнять с помощью клавиш $\boxed{\text{F}}$ и $\boxed{x^2}$ (в некоторых моделях МК не требуется перед клавишей $\boxed{x^2}$ нажимать клавишу перехода режима $\boxed{\text{F}}$).

**Задача 4.** Вычислить: 1) $(3,78)^2$; 2) $(1,58)^2+\frac{1}{0,57}$.

▶ 1) 3,78 $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ <u>14,2884</u>;

2) 1,58 $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 0,57 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ <u>4,2507859</u>. ◁

## Устные вопросы и задания

**1.** Перечислить последовательность действий для нахождения значения $2{,}3^7$ с помощью МК.

**2.** Как с помощью МК найти число, обратное числу $-240$?

## Вводные упражнения

**1.** Перечислить порядок выполнения действий для нахождения значения выражения:

1) $\frac{1}{(2-3,75)^2}$; 2) $12-\left(\frac{2}{3,5+7,8}-25\right)^3$.

**2.** Возвести в степень выражение:

1) $(a^8b^4)^5$; 2) $\left(\frac{x^7}{y^{12}}\right)^4$; 3) $(x^9-y^4)^2$; 4) $(2a^5+3b^4)^2$.

**3.** Найти приближённое значение $x\cdot y$, если:

1) $x\approx 0,285$, $y\approx 3,2$; 2) $x\approx 4,208$, $y\approx 0,26$; 3) $x\approx 0,39$, $y=x$.

## Упражнения

Записать показания табло микрокалькулятора после выполнения действий **(273—276)**.

**273.** 1) $(17,2)^2$; 2) $(23,4)^2$; 3) $453^2$; 4) $159^2$; 5) $(0,0141)^2$.

**274.** 1) $\frac{1}{21}$; 2) $-\frac{1}{23}$; 3) $-\frac{1}{14}$; 4) $-\frac{1}{8,12}$; 5) $\frac{1}{0,013}$; 6) $\frac{1}{0,081}$.

**275.** 1) $21^3$; 2) $(1,48)^5$; 3) $(3,71)^5$; 4) $(0,082)^6$; 5) $\frac{1}{(0,15)^2}$; 6) $\frac{1}{(0,42)^2}$.

**276.** 1) $\frac{1}{36}+0,281$; 2) $0,37-\frac{1}{16}$; 3) $\frac{1}{71}+\frac{1}{63}$;

4) $\frac{1}{0,17}\cdot\frac{1}{0,23}$; 5) $\frac{1}{3,4}:\frac{1}{6,3}$; 6) $\frac{1}{0,28}-\frac{1}{0,43}$.

**277.** Найти площадь квадратного участка земли, если длина его стороны равна 1915 м.

**278.** Вычислить: 1) $(3,2\cdot 10^7)^3$; 2) $(9,23\cdot 10^{-7})^3$.

**279.** Упростить выражение и найти его числовое значение с точностью до 0,01:

1) $\frac{9a^2-16}{(3a+4)(a-3)^2}\cdot\frac{a^2-6a+9}{3a^3-4a^2}$ при $a=0{,}0478$;

2) $\frac{4b^2-2b+1}{(2b+1)b^3}:\frac{8b^3+1}{4b^3+4b^2+b}$ при $b=0{,}1385$.

**280.** Дана функция $y=x^3$. Найти с точностью до 0,01 значения функции при $x=-1{,}11$; $-3{,}111$; $1{,}21$; $2{,}31$.

Шаг вперёд

## Исследуем возможности микрокалькулятора

Вы научились пользоваться клавишей $\boxed{y^x}$ при возведении чисел в натуральные степени. А не пытались попробовать с помощью этой же клавиши возвести число в какую-нибудь дробную степень? В 9 классе вы будете подробно изучать возведение чисел в степень $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое, $n$ — натуральное число (будете знакомиться со степенью с рациональным показателем). А сейчас попробуйте, например, с помощью клавиши $\boxed{y^x}$ найти значения $5^{0,9}$ и $5^{1,1}$. Увидите, что в первом случае будет получено число меньше, чем $5^1$, а во втором — больше.

Действительно получилось, что $5^{0,9}\approx 4{,}3$, $5^{1,1}\approx 5{,}9$.

Предлагаю с помощью клавиши $\boxed{y^x}$ сделать расчёты к следующим задачам гидротехники.

1. Расход воды $Q$ (количество воды в метрах кубических, протекающее через поперечное сечение за 1 с) небольшого оросительного канала можно определить с помощью водослива (поперечной перегородки с отверстием специальной формы) по формуле $Q=1{,}4\cdot h^{2,5}$, где $h$ — высота слоя воды (м) перед водосливом ($h$ называют напором воды). Найти расход воды, если $h=0{,}75$ м. Ответ. $Q\approx 0{,}68$ м$^3$.
2. В результате фильтрации в грунт расход воды в канале уменьшается. Если в данном месте канала расход воды $Q$ м$^3$, то в километре от этого места (по течению) он будет меньше на $t\%$, где $t$ (для суглинистого грунта) находится по формуле $t=\frac{1{,}9}{Q^{0,4}}$. Найти с точностью до сотых расход воды в километре от места, в котором $Q=26$ м$^3$. Ответ. 25,87 м$^3$.

# § 19 Последовательное выполнение операций на микрокалькуляторе

Большинство прикладных задач математики, физики, астрономии и других отраслей знаний решаются с приближёнными значениями величин. При многократных вычислениях по одной и той же формуле, содержащей несколько действий, бывает удобно предварительно составить программу вычислений на микрокалькуляторе. С процессом составления таких программ, а также с решением практических и прикладных задач с помощью МК вы познакомитесь в этом параграфе.

**Нужно вспомнить:**

- порядок выполнения арифметических действий;
- вычисление с помощью МК суммы двух чисел; разности; произведения; частного; степени; числа, обратного данному;
- нахождение приближённого значения выражения с заданной точностью.

**Задача 1.** Вычислить высоту, на которую поднимается камень, брошенный вертикально вверх со скоростью $v$, используя формулу $h = \frac{v^2}{2g}$, где $v \approx 25$ м/с, $g \approx 9{,}8$ м/с².

▶ Вычисления можно провести по программе

$$25 \boxed{\times} 25 \boxed{\div} 2 \boxed{\div} 9{,}8 \boxed{=} \underline{31{,}887755}.$$

Ответ. $h \approx 32$ м. ◁

Отметим, что при нажатии очередной клавиши операции на табло высвечивается результат всех предыдущих вычислений.

**Задача 2.** Определить сопротивление участка электрической цепи, состоящей из двух последовательно соединённых сопротивлений, если величина первого из них $R_1 \approx 5{,}15$ Ом, а на втором падение напряжения $U \approx 12{,}5$ В происходит при силе тока $I \approx 2{,}1$ А.

▶ Сопротивление $R$ на данном участке цепи можно найти по формуле $R = \frac{U}{I} + R_1$.

Получаем $12{,}5 \boxed{\div} 2{,}1 \boxed{+} 5{,}15 \boxed{=} \underline{11{,}102381}$.

Ответ. $R \approx 11{,}1$ Ом. ◁

**Задача 3.** Вычислить значение выражения $\frac{8,375 \cdot 26,3}{507} - 0,15$ с точностью до 0,01.

▶ 8,375 $\boxed{\times}$ 26,3 $\boxed{\div}$ 507 $\boxed{-}$ 0,15 $\boxed{=}$ $\underline{0,2844428}$.

Ответ. 0,28. ◁

**Задача 4.** Вычислить $163^2 + 122^2 - 179^2$.

▶ 163 $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 122 $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 179 $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\underline{9412}$.

Ответ. 9412. ◁

**Задача 5.** Вычислить $\frac{1}{152} - \frac{1}{354} + \frac{1}{23}$ с точностью до 0,0001.

▶ 152 $\boxed{1/x}$ $\boxed{-}$ 354 $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 23 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\underline{0,0472323}$.

Ответ. 0,0472. ◁

**Задача 6.** Вычислить $\left(\frac{1}{0,24}\right)^2 + (4,56)^2 - (5,28)^2$ с точностью до 0,01.

▶ 0,24 $\boxed{1/x}$ $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 4,56 $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 5,28 $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\underline{10,276311}$.

Ответ. 10,28. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Перечислить порядок действий для нахождения с помощью МК (имеющего клавишу $\boxed{y^x}$) значения выражения $25 + 39^3$; $67 - \frac{1}{106}$.
2. Сколько значащих цифр следует оставить в результате вычисления на МК произведения $xyz$, если $x \approx 2,308$, $y \approx 42$, $z \approx 0,3$?
3. Почему в задаче 2 текста параграфа результат вычислений округлён до 11,1 Ом?

## Вводные упражнения

1. Найти $x + y$ и $x - y$, если:
   1) $x \approx 2,4$, $y \approx 0,356$; 2) $x \approx 3,08$, $y \approx 2,0$.
2. Используя МК, найти $x \cdot y$ и $x^2$, если:
   1) $x \approx 0,806$, $y \approx 2,3$; 2) $x \approx 13,6$, $y \approx 0,9$.
3. Используя МК, найти $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$, если:
   1) $x \approx 6,9$; 2) $x \approx 0,385$.

## Упражнения

Записать показания табло микрокалькулятора после выполнения действий **(281—282)**.

**281.** 1) $484 \cdot 5{,}87 + 6032$; 2) $353 : 4{,}1 + 120$;

3) $\frac{17{,}345 \cdot 29{,}95}{425} - 4{,}348$; 4) $\frac{1{,}398 \cdot 9{,}348}{14{,}25} - 10{,}542$.

**282.** 1) $(2{,}348 - 1{,}453) \cdot 2{,}379$; 2) $(16{,}87 + 35{,}67) : 254$;

3) $\left(\frac{643}{34} - 23\right) \cdot 44$; 4) $\left(\frac{728}{54} + 46\right) : 247$.

**283.** Найти периметр и площадь прямоугольника со сторонами $a$ и $b$, если $a \approx 4{,}8$ см, $b \approx 14{,}5$ см.

**284.** Какой должна быть ширина прямоугольного участка земли, чтобы при длине 164 м он имел площадь $8{,}6 \cdot 10^2$ м$^2$?

**285.** Вычислить:

1) $256^2 + 321^2$; 2) $524^2 - 499^2$; 3) $186^2 + 271^2 - 328^2$.

**286.** Вычислить с точностью до 0,001:

1) $\frac{1}{2{,}1} - \frac{1}{8{,}3} - \frac{1}{7{,}1}$; 2) $\frac{1}{3{,}4} - \frac{1}{6{,}8} + \frac{1}{1{,}2}$.

**287.** Вычислить с точностью до 0,01:

1) $\frac{1}{(0{,}34)^2}$; 2) $\left(\frac{1}{0{,}57}\right)^2$; 3) $\left(\frac{1}{0{,}26}\right)^2 + \frac{1}{(0{,}43)^2}$;

4) $\frac{1}{(0{,}17)^2} - \left(\frac{1}{0{,}23}\right)^2$; 5) $\left(\frac{1}{0{,}28}\right)^2 - (3{,}21)^2$; 6) $(1{,}47)^2 + \frac{1}{(3{,}4)^2}$.

**288.** Вычислить с точностью до 0,1:

1) $(5{,}1)^3 + (4{,}3)^2$; 2) $(3{,}7)^3 - (2{,}3)^2$;

3) $(3{,}2)^5 - (1{,}3)^2 + \frac{1}{0{,}15}$; 4) $(7{,}8)^4 + (3{,}8)^2 - \frac{1}{0{,}24}$.

**289.** Электрическая плитка работала $t = 5$ ч при напряжении $U \approx 127$ В и силе тока $I \approx 3{,}5$ А. Рассчитать стоимость (в условных единицах) затраченной электрической энергии $A$ (кВт · ч) при тарифе 1 у. е. за 1 кВт · ч ($A = UIt$).

**290.** Чтобы найти диаметр проволоки, её намотали на стержень, укладывая витки рядом друг с другом. Оказалось, что 22 витка заняли 9 мм по длине стержня. Найти диаметр проволоки.

**291.** Вычислить силу тока на участке цепи, если его сопротивление $R \approx 0{,}75$ Ом и падение напряжения на этом участке $U \approx 10{,}2$ В.

**292.** Рассчитать сопротивление участка цепи, падение напряжения на котором $U \approx 3{,}45$ В, при силе тока в цепи $I \approx 2{,}1$ А.

**293.** В цепь с напряжением $U \approx 220$ В включён электрический утюг мощностью тока $P \approx 0{,}35$ кВт. Определить силу тока $I$ в цепи ($P = UI$).

*Диалог об истории*

### Проверим древнюю формулу

Профессор, а есть ли какие-нибудь интересные задачи, которые в древности решались очень долго, а мы сегодня благодаря калькулятору можем решить быстро?

Таких задач было немало во все времена до изобретения вычислительной техники. Предложу вам одну формулу, которую вывели для $n \leqslant 10$ математики Древнего Вавилона. Проверка её справедливости занимала много времени. А вы проверьте её с помощью МК для $n = 10$; $n = 14$.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right)(1 + 2 + 3 + \ldots + n).$$

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

Записать показания МК после выполнения действий (294—298).

**294.** 1) $-6{,}502 \cdot 10^5 - 4{,}987 \cdot 10^6$; 2) $1{,}23456 \cdot 10^{43} + 9{,}87601 \cdot 10^{42}$;
3) $3{,}128 \cdot 10^6 + 5{,}24 \cdot 10^7$; 4) $-8{,}7654 \cdot 10^{31} - 1{,}2345 \cdot 10^{32}$.

**295.** 1) $123\,456 \cdot 4{,}598 \cdot 10^9$; 2) $3{,}874 \cdot 10^{11} \cdot 98\,765$;
3) $(5{,}8 \cdot 10^{13}) : (3{,}4 \cdot 10^{15})$; 4) $(7{,}1 \cdot 10^{24}) : (5{,}6 \cdot 10^{27})$.

**296.** 1) $5897 + 6453 - 282 - 384$; 2) $7654 - 2835 + 351 - 405$;
3) $4{,}58 \cdot 3{,}57 : 1{,}2 \cdot 4{,}57$; 4) $45{,}28 : 2{,}3 \cdot 357 : 132$.

**297.** 1) $4{,}4 \cdot 6{,}5 \cdot 1{,}5 - 247 : 13 - 1188 - 44$;
2) $2{,}4 \cdot 2{,}5 - 60{,}2 : 14 - 76{,}8 \cdot 3{,}5 : 48$.

**298.** 1) $\left(\frac{87 \cdot 43}{68} + 25\right) : 83$; 2) $\left(\frac{125 \cdot 51}{234} - 4{,}35\right) \cdot 2{,}8$.

**299.** Вычислить сопротивление $R$ медного стержня, длина которого $l \approx 0{,}25$ м, площадь поперечного сечения $S \approx 1{,}2 \cdot 10^2$ мм$^2$, если удельное сопротивление меди $\rho \approx 0{,}017$ Ом $\cdot$ мм$^2$/м $\left(R = \frac{\rho l}{S}\right)$.

**300.** Вычислить кинетическую энергию тела по формуле

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \text{ если } m \approx 7{,}6 \text{ кг}, \ v \approx 4{,}2 \text{ м/с}.$$

**301.** Вычислить по формуле $Q = I^2Rt$ количество тепла $Q$, выделяемое проводником за $t = 15$ с, если его сопротивление $R \approx 34$ Ом и по нему проходит ток силой $I = 17$ А.

**302.** В городе с населением $5{,}70 \cdot 10^4$ человек было проведено медицинское обследование населения с целью выявления частоты встречающихся групп крови. Выяснили, что людей с группой крови I приблизительно 32,9%, с группой крови II — 35,8%, с группой III — 23,2% и с группой IV — 8,1%. Сколько приблизительно человек с каждой из групп крови проживает в городе?

**303.** Упростить выражение и найти его числовое значение с точностью до 0,0001:

1) $\frac{a^2 + 12}{a^2 - 4} - \frac{a + 2}{a - 2}$ при $a = 4{,}31 \cdot 10^3$;

2) $\frac{a + b}{a + 2b} : \left(\frac{a}{a - 2b} + \frac{b^2}{a^2 - 4b^2}\right)$ при $a = 3{,}78 \cdot 10^4$, $b = 4{,}23 \cdot 10^4$.

**304.** Дана функция $y = 2{,}1 + \frac{1}{x}$. Найти с точностью до 0,1 значения функции при $x = 0{,}471$; $1{,}551$; $3{,}483$; $10{,}48$.

**305.** Калорийность суточного рациона питания для детей 11—15 лет составляет примерно 3000 ккал. Найти калорийность предложенного ниже суточного меню для подростков оздоровительного лагеря.

| *Завтрак* | | *Калорийность (ккал на 100 г продукта)* |
|---|---|---|
| Творог | 125 г | 86 |
| Сыр голландский | 50 г | 380 |
| Хлеб пшеничный | 30 г | 236 |
| Масло сливочное | 25 г | 661 |
| Кофе натуральный со сгущённым молоком | 200 г | 310 |

| *Обед* | | *Калорийность (ккал на 100 г продукта)* |
|---|---|---|
| Суп из говядины | 150 г | 187 |
| Курица отварная | 125 г | 241 |
| Макароны | 100 г | 332 |
| Салат из помидоров | 100 г | 19 |
| Компот из сухофруктов | 200 г | 223 |
| Хлеб ржаной | 50 г | 190 |
| *Ужин* | | |
| Сосиски | 150 г | 324 |
| Картофель | 100 г | 83 |
| Каша манная | 100 г | 326 |
| Хлеб пшеничный | 30 г | 236 |
| Чай | 200 г | — |

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Количество сухого вещества в молоке $C$ (в процентах) определяется по формуле $C = 1{,}225p + 250(d-1) + 0{,}5$, где $p$ — жирность (в процентах), $d$ — плотность молока (в долях от плотности воды). Найти процентное содержание сухого вещества в молоке, у которого $p \approx 3{,}6$, $d \approx 1{,}032$.
2. Для того чтобы поднять ведро из колодца, нужно ручку вала повернуть 10 раз. Чему равна наименьшая глубина колодца $h$ (с точностью до 0,1 м), если известно, что диаметр вала колодца равен 30 см?
3. Найти линейную скорость $v$ движения точки на экваторе при вращении Земли вокруг своей оси, если радиус Земли $R \approx 6400$ км.
4. Определить с точностью до часа период обращения $T$ спутника из серии «Космос» вокруг Земли, если высота орбиты $H \approx 36\,200$ км, скорость движения по орбите $v = 3$ км/с, радиус Земли $R \approx 6400$ км.
5. Мощность электрического тока $P$ (в ваттах) находится по формулам: $P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}$, где $I$ — сила тока (в амперах), $R$ — сопротивление (в Омах), $U$ — напряжение (в вольтах). Найти $P$, если:
1) $I \approx 12$ А, $U \approx 202$ В; 2) $I \approx 1{,}3$ А, $R \approx 0{,}3$ Ом;
3) $U \approx 127$ В, $R \approx 5{,}1$ Ом.

**6.** Объяснить, что означает запись: 1) на рулоне обоев: $L = (15 \pm \pm 0{,}25)$ м; 2) на электрообогревателе: $P = (850 \pm 10)$ Вт.

**7.** Определить, с какой точностью записаны значения величин:
1) диаметр молекулы воды $d \approx 2{,}8 \cdot 10^{-7}$ мм;
2) территория России $S \approx 1{,}27 \cdot 10^{7}$ км$^2$.

**8.** *Световой год* — это расстояние, которое проходит луч света за год (365 дней). Найти величину светового года, если скорость света $v_c \approx 3{,}00 \cdot 10^{5}$ км/с.

**9.** Туманность Андромеды удалена от Земли на расстояние $s \approx 2{,}3 \cdot 10^{6}$ световых лет. Выразить расстояние $s$ в километрах.

**10.** При измерении температуры воды для купания ребёнка оказалось, что она находится между 36,8 °C и 36,9 °C. Чему равна абсолютная погрешность такого измерения?

**11.** Назвать абсолютную погрешность приближения данных, указанных в справочнике:
1) время оборота Земли вокруг своей оси (звёздные сутки) — 23 ч 56 мин 4,09 с;
2) период обращения Земли вокруг Солнца (тропический год) — 365,25 суток;
3) наибольшая температура воздуха 56,7 °C на Земле наблюдалась в долине Смерти (в Калифорнии);
4) наиболее низкая температура воздуха –88,3 °C наблюдалась в Антарктиде на станции «Восток»;
5) наибольшая глубина Тихого океана (в Марианской впадине) — $11{,}022 \cdot 10^{3}$ м;
6) численность населения Земли в середине 2009 г. — $6{,}80 \cdot 10^{9}$ человек;
7) площадь всех азиатских островов — $2{,}00 \cdot 10^{6}$ кв. км;
8) площадь шлейфовых ледников Антарктиды — $1{,}582 \times \times 10^{6}$ кв. км.

**12.** Некоторым прибором выполняют измерения с относительной погрешностью 5%. В каких границах лежит точное значение величины, если результат её измерения данным прибором показал число 326?

**13.** Перед настилом напольного покрытия были сделаны замеры длины $L$ и ширины $H$ комнаты в сантиметрах $520 \leqslant L \leqslant 525$, $362 \leqslant H \leqslant 365$. Найти:
1) площадь пола $S$;
2) длину плинтуса $P$, который прикрепляется вдоль всех стыков стен и пола, если ширина $h$ (в сантиметрах) единственного дверного проёма в комнате $91 \leqslant h \leqslant 92$.

## В этой главе вы узнали,

что такое:

— абсолютная погрешность приближения;
— граница абсолютной погрешности;
— точность измерения;
— округление чисел;
— относительная погрешность приближения;
— стандартный вид числа;
— верные, строго верные и сомнительные цифры;
— значащие цифры;
— порядок и мантисса числа;

как:

— оценивать точность приближения;
— применять правило округления чисел;
— выполнять действия сложения, вычитания, умножения и деления с приближёнными числами;
— выполнять простейшие вычисления на инженерном микрокалькуляторе (в том числе находить степень числа и число, обратное данному).

### ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

**I уровень**

1. Представить дробь $\frac{4}{9}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.
2. Записать в стандартном виде число 44,301; 0,483.
3. Вычислить с точностью до 0,01 значение выражения $\frac{348}{27}+34\cdot78$.

**II уровень**

4. Представить дробь $\frac{3}{7}$ в виде десятичной с точностью до 0,001.
5. Записать в стандартном виде число 74 580; 0,0026; $3\frac{7}{125}$.
6. Найти значение $x+y$, если $x\approx2{,}48$, $y\approx5{,}6$.
7. Найти значение $x\cdot y$, если $x\approx9{,}038$, $y\approx0{,}26$.
8. Вычислить с точностью до 0,01 значение выражения $\frac{1}{0{,}48}+3{,}79\cdot0{,}34$.

III уровень

9. Представить дробь $\frac{10}{11}$ в виде десятичной с точностью до 0,001.

10. Записать в стандартном виде числа 0,000563; $8\frac{13}{625}$.

11. Найти значение $x+\frac{y}{z}$, если $x\approx 4{,}97$, $y\approx 1{,}254$, $z=0{,}36$.

12. Найти значение $x^5$; $\frac{1}{x^3}$, если $x\approx 2{,}36$.

13. Вычислить с точностью до 0,01 значение выражения $\frac{2{,}5\cdot 3{,}7}{1{,}8}+\frac{18{,}9}{3{,}4\cdot 2{,}6}$.

## ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. История возникновения теории приближённых вычислений.
2. Округление чисел и количеств у древних народов.
3. А. Н. Крылов и его вклад в развитие теории приближённых вычислений.
4. В. М. Брадис и его вычислительные таблицы.
5. Современные задачи практики, решаемые с помощью приближённых вычислений.
6. История создания вычислительной техники (от абака до современных компьютеров).
7. Методы приближённых вычислений при решении уравнений.
8. Графический способ нахождения приближённых значений корней уравнений.
9. Способы нахождения приближённых значений числа $\pi$.
10. Приближённые формулы.

# Глава III. Квадратные корни

Более трёх тысяч лет назад, одновременно с решением задачи о нахождении площади земельного участка квадратной формы, в Древнем Вавилоне решали и обратную задачу: как найти сторону квадрата, если известна его площадь? Эта задача впоследствии получила название задачи *нахождения квадратного корня* из числа.

Например, если площадь участка квадратной формы равна 36 единицам площади, то сторону $a$ этого участка искали таким образом, чтобы $a^2=36$. При этом говорили, что 6 является квадратным корнем из 36, так как $6^2=36$.

Задача нахождения квадратного корня из любого числа в древности решалась непросто. Не каждый учёный тогда мог, например, найти сторону квадрата, имеющего площадь 20 квадратных единиц.

Вавилонские математики первыми научились находить приближённое значение квадратного корня из любого натурального числа. Для быстрого решения практических задач они одновременно с таблицами квадратов чисел составляли и таблицы квадратных корней.

В этой главе вы познакомитесь со специальным обозначением квадратного корня из числа, научитесь находить значение корня из любого неотрицательного числа.

Узнаете, что существуют числа, которые нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое, а $n$ — натуральное число. Такие числа расширят множество знакомых вам рациональных чисел до множества действительных чисел.

Также вы узнаете, что все действительные числа, отмеченные на числовой оси, заполняют её целиком, т. е. каждому действительному числу соответствует единственная точка на числовой оси и, наоборот, каждой точке числовой оси соответствует единственное действительное число.

## § 20 Арифметический квадратный корень

Находить квадрат любого числа вы умели ещё в младших классах. При изучении этого параграфа вы научитесь выполнять обратное действие — по квадрату числа находить само число. Это действие помогает решать многие прикладные задачи.

**Нужно вспомнить:**

- понятие квадрата числа;
- формулу разности квадратов двух чисел;
- решение линейных неравенств;
- правила сравнения дробей.

**Задача 1.** Сторона квадратного участка земли равна 12 м. Найти его площадь $S$.

► Площадь участка равна квадрату его стороны:

$$S = 12^2 = 144 \ (\text{м}^2). \ \triangleleft$$

**Задача 2.** Найти сторону квадрата, площадь которого равна 81 дм².

► Предположим, что длина стороны квадрата равна $x$ дециметрам. Тогда его площадь равна $x^2$ дм². Так как по условию эта площадь равна 81 дм², то $x^2=81$. Длина стороны квадрата — положительное число. Положительным числом, квадрат которого равен 81, является число 9.

Ответ. 9 дм. ◁

В задаче 2 требовалось найти число $x$, квадрат которого равен 81, т. е. решить уравнение $x^2=81$. Это уравнение можно записать в виде $x^2-81=0$ или $(x-9)(x+9)=0$, откуда $x_1=9$, $x_2=-9$. Числа 9 и $-9$ обращают уравнение $x^2=81$ в верное числовое равенство, т. е. $9^2=81$ и $(-9)^2=81$. Эти числа называют **квадратными корнями** из числа 81. Один из квадратных корней — число положительное. Его называют **арифметическим квадратным корнем** из числа 81 и обозначают $\sqrt{81}$. Таким образом, $\sqrt{81}=9$.

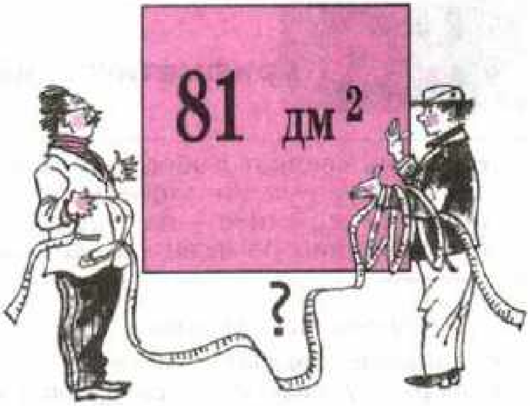
**!** Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа $a$ называется неотрицательное число, квадрат которого равен $a$.

Арифметический квадратный корень из числа $a$ обозначается так: $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называется **знаком арифметического квадратного корня**; $a$ называется **подкоренным выражением**. Выражение

$\sqrt{a}$ читается так: «Арифметический квадратный корень из числа $a$».

Например, $\sqrt{36}=6$, так как $6\geqslant 0$ и $6^2=36$.

Приведём другие примеры: $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$, $\sqrt{0{,}49}=0{,}7$.




В случаях, когда ясно, что речь идёт об арифметическом квадратном корне, говорят: «Корень квадратный». **Действие нахождения квадратного корня из числа называют извлечением квадратного корня.**

Возводить в квадрат можно любые числа, но извлекать квадратный корень можно не из любого числа. Например, нельзя извлечь квадратный корень из числа $-4$, так как нет такого числа, квадрат которого равен $-4$.

**Итак, выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a\geqslant 0$. Определение квадратного корня можно кратко записать так:**

$$\sqrt{a}\geqslant 0, \quad (\sqrt{a})^2=a.$$

**Равенство $(\sqrt{a})^2=a$ справедливо при $a\geqslant 0$.**

**Задача 3.** Вычислить $5\sqrt{32\cdot 2}-3\sqrt{2\cdot 8}$.

► $5\sqrt{32\cdot 2}-3\sqrt{2\cdot 8}=5\sqrt{64}-3\sqrt{16}=5\cdot 8-3\cdot 4=28$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Какое число называют квадратным корнем из числа $a$?
2. Сколько существует квадратных корней из положительного числа $b$?
3. Какое число называют арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа $c$?
4. Назвать подкоренное выражение в записи: $\sqrt{x-2}$; $\sqrt{x}-2$; $2\sqrt{0{,}04}$; $3\sqrt{0{,}6}-5$.
5. Прочитать запись: $\sqrt{b}$; $\sqrt{5-a}$; $\sqrt{2(x+1)}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}$.
6. Как называют действие нахождения квадратного корня из числа?
7. Записать символами определение квадратного корня из числа $a$.

## Вводные упражнения

**1.** Вычислить: 1) $10^2$; $0{,}1^2$; $\left(\frac{3}{7}\right)^2$; $\left(-1\frac{1}{2}\right)^2$; 2) $10+4\cdot(-7)$; $-3\cdot15-8$.

**2.** Сравнить: 1) $27^2$ и $27{,}1^2$; 2) $\left(\frac{3}{8}\right)^2$ и $\left(\frac{5}{8}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2$ и $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$.

**3.** Найти положительное число, квадрат которого равен: 49; 0,04.

**4.** Найти отрицательное число, квадрат которого равен: 64; 0,16.

**5.** Найти положительный корень уравнения:
1) $(x-2)(x+3)=0$; 2) $(x-7)(x+7)=0$.

**6.** При каких значениях $x$ значение выражения $2x-3$ является:
1) положительным числом; 2) неотрицательным числом?

## Упражнения

**306.** Найти сторону квадрата, если его площадь равна:
1) 16 м$^2$; 2) 100 дм$^2$; 3) 0,64 км$^2$; 4) $\frac{36}{49}$ мм$^2$.

**307.** Вычислить арифметический квадратный корень из числа:
81; 64; 100; 0,16; 0,09; 0,25; 1,44; 4900; 6400.

**308.** Верно ли равенство:
1) $\sqrt{16}=4$; 2) $\sqrt{100}=10$; 3) $\sqrt{25}=-5$; 4) $\sqrt{0}=0$?

Вычислить (309—311).

**309.** 1) $(\sqrt{4})^2$; 2) $(\sqrt{9})^2$; 3) $\left(\sqrt{\frac{3}{12}}\right)^2$; 4) $(\sqrt{0{,}25})^2$.

**310.** 1) $7-\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{16}-9$; 3) $4\cdot\sqrt{0{,}01}$;
4) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{0{,}81}$; 5) $0{,}25\cdot\sqrt{0{,}25}$.

**311.** 1) $2^3+5\sqrt{16}$; 2) $3\sqrt{121}-2\sqrt{144}$; 3) $2\sqrt{3\cdot27}-6\sqrt{2\cdot18}$;
4) $\sqrt{2^2+3\cdot7}$; 5) $\sqrt{3^2+4^2}$; 6) $\sqrt{17^2-15^2}$.

**312.** Найти значение выражения:
1) $3\sqrt{10-2a}$ при $a=-3$, $a=3$, $a=5$;
2) $5\sqrt{6x-2}$ при $x=1$, $x=\frac{1}{3}$, $x=3$.

**313.** При каких значениях $a$ имеет смысл выражение:
1) $\sqrt{2a}$; 2) $\sqrt{-a}$; 3) $\sqrt{2-a}$; 4) $\sqrt{3+a}$?

**314.** Решить уравнение: 1) $\sqrt{x}=2$; 2) $\sqrt{x}=10$.

**315.** Сравнить числа: 1) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ и $\sqrt{\frac{9}{16}}$; 2) $\sqrt{0,04}$ и $\sqrt{0,09}$.

**Диалог об истории**

### Возникновение знака квадратного корня

Профессор, Вы рассказывали, что в древности многие действия с числами описывались словами, а в Средние века стали придумывать специальные символы, сопровождающие эти записи. А когда был придуман знак арифметического квадратного корня?

Лишь в XIII в. европейские математики сделали попытку более коротко записывать операцию извлечения корня. Перед числом, из которого извлекался корень, стали писать слово *Radix* (корень) или сокращённо одну букву *R*. Так, в работах французского математика Н. Шюке встречается запись $R^2 12$, что означает $\sqrt{12}$. Немецкие математики XV—XVI вв. стали обозначать квадратный корень точкой, стоящей впереди числа. При быстром письме точки заменялись чёрточками, которые постепенно перешли в символ **V**. Из этого символа образовался знак $\vee$, уже близкий к современному знаку корня. Затем долгое время вместо корня из числа $a$ математики писали $\vee\overline{a}$. И только в 1637 г. Р. Декарт соединил знак корня с горизонтальной чертой над числом, что и привело к принятому по сей день знаку $\sqrt{\ }$. Однако всеми математиками знак квадратного корня, предложенный Декартом, стал использоваться лишь в начале XVIII в.

## § 21 Действительные числа

В этом параграфе вы узнаете, что не любое число можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое, а $n$ — натуральное число. Например, числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ и др. не могут быть записаны в виде $\frac{m}{n}$, т. е. не являются рациональными числами. С «нерациональными» — иррациональными числами вы познакомитесь в этом параграфе. При этом поймёте, что с одним из иррациональных чисел — числом $\pi$ вы знакомы давно.

**Нужно вспомнить:**

- понятия натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел;
- правила округления чисел;
- понятие точности записи приближённых значений;
- правила сравнения обыкновенных дробей; десятичных дробей;
- изображение чисел точками на числовой оси.

## 1. Рациональные числа.

Появление новых чисел в математике связано с необходимостью выполнения тех или иных действий. При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако при вычитании двух натуральных чисел не всегда получается натуральное число. Например, разность $2-5$ не является натуральным числом. Чтобы вычитание было всегда выполнимо, были введены **отрицательные числа** и **число 0**. Множество натуральных чисел расширилось до множества целых чисел:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

При сложении, умножении, вычитании целых чисел всегда получаются целые числа. Однако при делении двух целых чисел не всегда получается целое число. Например, частное $2:5$ не является целым числом. Чтобы деление было всегда выполнимо, были введены **рациональные числа**, т. е. числа вида $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое число, $n$ — натуральное число. Множество целых чисел расширилось до множества рациональных чисел.

При выполнении четырёх арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

**Рациональное число можно записать в виде десятичной дроби, конечной или бесконечной.**

Например, числа $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{4}$ можно записать в виде конечных десятичных дробей: $\frac{2}{5}=0{,}4$; $\frac{3}{4}=0{,}75$. Числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{11}$ после деления «уголком» можно записать в виде бесконечных десятичных дробей:

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots;\quad \frac{5}{11}=0{,}454545\ldots .$$

В записи бесконечной десятичной дроби 0,333... повторяется цифра 3. Цифру 3 называют **периодом этой дроби**; саму дробь называют **периодической с периодом 3**, записывают в виде 0,(3) и читают: «Нуль целых и три в периоде».

В записи дроби 0,454545... повторяется группа из двух цифр: 45; эту дробь называют периодической с периодом 45 и записывают в виде 0,(45).

Приведём ещё примеры бесконечных периодических дробей:

$$-\frac{7}{30}=-0{,}2333...=-0{,}2(3);\quad 27\frac{13}{330}=27{,}0393939...=27{,}0(39).$$

Любое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби. И наоборот, любую бесконечную периодическую или конечную десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби, т. е. в виде $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое, $n$ — натуральное число.

**Задача 1.** Представить число $\frac{27}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби.

$$\begin{array}{r|l} -27 & 11 \\ \underline{22} & \overline{2{,}4545...} \\ -50 & \\ \underline{44} & \\ -60 & \\ \underline{55} & \\ -50 & \\ \underline{44} & \\ -60 & \\ \underline{55} & \\ 5 & \end{array}$$

▶ Воспользуемся алгоритмом деления «уголком».

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 45. Имеем $\frac{27}{11}=2{,}4545...=2{,}(45)$.

Ответ. 2,(45). ◁

**Задача 2.** Представить в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь: 1) 1,(7); 2) 0,2(18).

▶ 1) Пусть $x=1{,}(7)=1{,}777...$, тогда $10x=17{,}(7)=17{,}777...$.

Вычитая из второго равенства первое, получаем $9x=16$, откуда $x=\frac{16}{9}$.

2) Пусть $x=0{,}2(18)=0{,}2181818...$, тогда

$10x=2{,}(18)=2{,}181818...$, $1000x=218{,}(18)=218{,}181818...$.

Вычитая из третьего равенства второе, получаем $990x=216$, откуда $x=\frac{216}{990}=\frac{12}{55}$.

Ответ. 1) $1{,}(7)=1\frac{7}{9}$; 2) $0{,}2(18)=\frac{12}{55}$. ◁

## 2. Иррациональные числа. Действительные числа.

Наряду с бесконечными периодическими десятичными дробями в математике рассматриваются также и **бесконечные десятичные непериодические дроби.**

Например, дробь 0,1010010001..., в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 — два нуля и т. д., Действительные числа

Рациональные числа | Иррациональные числа

*Рис. 30*

является непериодической. Непериодической является также дробь 0,123456..., в которой после запятой записаны подряд все натуральные числа.

**!** Бесконечные десятичные непериодические дроби называют **иррациональными числами**. Рациональные и иррациональные числа образуют **множество действительных чисел** (рис. 30).

**Арифметические действия и правила сравнения** для действительных чисел определяются так, что свойства этих действий, а также свойства равенств и неравенств оказываются такими же, как и для рациональных чисел.

Обратимся к действию извлечения корня. В курсе высшей математики доказывается, что из любого неотрицательного действительного числа можно извлечь квадратный корень. В результате извлечения квадратного корня может получиться как рациональное, так и иррациональное число.

Например, $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$ — рациональное число, а $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ — иррациональное число.

Иррациональными являются также числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ и т. д., т. е. квадратные корни из натуральных чисел, которые не являются квадратами натуральных чисел.

Заметим, что **иррациональные числа получаются не только при извлечении квадратных корней**. Например, число $\pi$, равное отношению длины окружности к её диаметру, является иррациональным числом; отметим, что число $\pi$ не может быть получено извлечением корня из рационального числа.

На практике для нахождения приближённых значений квадратных корней с требуемой точностью используются таблицы, микрокалькуляторы и другие вычислительные средства.

**Задача 3.** Вычислить на МК приближённое значение $\sqrt{14}$ с точностью до 0,001.

► 14 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\underline{3{,}7416573}$. Ответ. 3,742. ◁

**Задача 4.** Вычислить на МК с точностью до 0,1: $23 \cdot \sqrt{34 + \sqrt{26}}$.

▶ Запишем данное выражение в виде $(\sqrt{34+\sqrt{26}})\cdot 23$ и вычислим его значение по программе

34 $\boxed{+}$ 26 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\times}$ 23 $\boxed{=}$ $\underline{143{,}81718}$.

Ответ. 143,8. ◁

**Задача 5.** Вычислить на МК с точностью до 0,01: $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$.

▶ Запишем данное выражение в виде $\sqrt{\sqrt{3+\sqrt{5}}+2}$ и вычислим его по программе

3 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\underline{2{,}0708079}$.

Ответ. 2,07. ◁

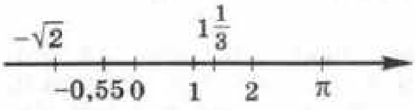



Рис. 31

Итак, практические действия над иррациональными числами заменяются действиями над их десятичными приближениями.

Геометрически действительные числа изображаются точками числовой оси (рис. 31). Каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой оси, и каждой точке числовой оси соответствует единственное действительное число.

## Устные вопросы и задания

1. Назвать причины расширения понятия числа от натурального до целого; от целого до рационального.
2. Привести пример десятичной конечной дроби; бесконечной периодической дроби.
3. Какие несократимые обыкновенные дроби нельзя записать в виде конечных десятичных дробей?
4. Что называют иррациональным числом?
5. Какие числа называются действительными?

## Вводные упражнения

1. Вычислить: 1) $2{,}8:\frac{14}{15}$; 2) $1{,}8\cdot 2\frac{2}{3}$; 3) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2\cdot 0{,}6$; 4) $(-0{,}8)^2:0{,}4$.
2. Выполнить деление с точностью до 0,01:
   1) $25:9$; 2) $335:3$; 3) $7{,}3:0{,}7$; 4) $0{,}5:0{,}06$.

**3.** Вычислить арифметический квадратный корень из числа:

1) 0,49; 2) 2500; 3) 160 000; 4) 0,0001; 5) $\frac{4}{9}$; 6) $\frac{16}{25}$.

**4.** Решить уравнение:

1) $\sqrt{x}=0$; 2) $\sqrt{x}=1$; 3) $\sqrt{x}=100$; 4) $\sqrt{x}=25$.

## Упражнения

**316.** Прочитать дробь:

1) 0,(2); 2) 2,(21); 3) 15,3(53); 4) −2,77(3).

**317.** Записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби:

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{125}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{11}$; 5) $-\frac{3}{5}$; 6) $-3\frac{1}{7}$.

**318.** Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь:

1) 0,(6); 2) 0,(7); 3) 4,1(25); 4) 2,3(81).

**319.** Сравнить числа:

1) 0,35 и 0,(35); 2) 1,03 и 1,0(3); 3) 3,7(2) и 3,72.

**320.** Даны числа: −8; $-\sqrt{16}$; −0,3; $-\frac{5}{2}$; 12; $\sqrt{7}$; 0; $\sqrt{\frac{1}{9}}$; 1. Выписать те из них, которые являются: натуральными; целыми; рациональными.

**321.** (Устно.) Какие из указанных чисел являются иррациональными: −2; 1; 0; $\sqrt{11}$; $\sqrt{16}$; −1,7; $\sqrt{17}$; $\frac{4}{5}\sqrt{225}$?

**322.** Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,001:

1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{6{,}6}$; 4) $\sqrt{4{,}3}$; 5) $\sqrt{0{,}5}$; 6) $\sqrt{0{,}05}$.

**323.** Площадь квадрата равна 12 м$^2$. Найти длину его стороны с точностью до 1 см.

**324.** Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:

1) $\sqrt{57}+\sqrt{31}-\sqrt{23}$; 2) $\sqrt{87}-\sqrt{54}+\sqrt{17}$; 3) $\sqrt{687+\sqrt{123}}$;

4) $\sqrt{801-\sqrt{250}}$; 5) $\sqrt{\sqrt{35604-\sqrt{28}}}$; 6) $\sqrt{\sqrt{6023}+\sqrt{5785}}$;

7) $\frac{38}{\sqrt{\sqrt{55}-\sqrt{28}}}$; 8) $\frac{871}{\sqrt{13^2+18^2}}$.

**325.** Вычислить с точностью до 0,1 на микрокалькуляторе:

1) $\frac{39}{\sqrt{5}}+\frac{44}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{86}{\sqrt{2}}-\frac{23}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{132^2+153^2}$;

4) $\sqrt{189^2-65^2}$; 5) $\sqrt{33^2+18^2-23^2}$; 6) $\frac{34}{\sqrt{28^2-17^2}}$.

**326.** Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{2}}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{8+\sqrt{2}}-1}$; 3) $\sqrt{6\sqrt{5}-\sqrt{13}}$.

Диалог об истории

### Неразумные числа

Профессор, почему Вы уверены, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число? Может быть, его всё же можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ очень большие натуральные числа?

Хочу похвалить тебя за то, что не принимаешь на веру математические высказывания. Постараюсь в доступной форме доказать тебе, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Доказательство этого факта проведу ***методом от противного***.

Предположим, что $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь (т. е. $m$ и $n$ не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1). Тогда должно выполняться равенство $\frac{m^2}{n^2}=2$, откуда $m^2=2n^2$. То есть $m^2$, а значит, и $m$ — чётные числа. Итак, $m=2k$, где $k$ — натуральное число. Подставив это выражение в равенство $m^2=2n^2$, получим $4k^2=2n^2$ и $n^2=2k^2$. Таким образом, $n^2$, а значит, и $n$ — чётные числа, т. е. $n=2p$, где $p$ — натуральное число. Итак, $m$ и $n$ имеют общий делитель 2, что противоречит нашему предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Остаётся сделать вывод: нет рационального числа, квадрат которого равен 2.

Таким образом, число $\sqrt{2}$ (а значит, и такие числа, как $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ и др.) — число другой природы, нежели рациональные числа. Ответил я на твой вопрос, Светлана?

Ответили, я всё поняла. Спасибо. Мне очень нравится метод доказательства от противного. В геометрии мы этим методом доказывали признаки параллельности прямых.

У меня есть ещё вопрос. Как и когда люди впервые столкнулись с непериодическими десятичными дробями?

Чтобы понять мой следующий исторический рассказ, я должен ввести понятия соизмеримости и несоизмеримости отрезков. Вы помните, что измерить отрезок — это значит сравнить его с другим отрезком, принятым за единицу измерения (вам известны общепринятые единицы измерения длин отрезков: миллиметр, сантиметр, метр и др.). Вообще за единицу измерения можно принять любой отрезок в зависимости от цели измерения. Обычно отрезок, который укладывается целое число раз в других отрезках, называют их *мерой*. Если отрезки имеют общую меру, то их называют *соизмеримыми*. Если такой общей меры (даже очень маленькой) для двух отрезков не существует, то отрезки называют *несоизмеримыми*.

Профессор, тогда приведите, пожалуйста, пример несоизмеримых отрезков.

Известно, что в середине V в. до н. э. учёные пифагорейской школы доказали *несоизмеримость стороны квадрата и его диагонали*. Согласно легенде, несоизмеримость открыл сам Пифагор и был так потрясён, что запретил своим ученикам разглашать эту тайну, так как девизом пифагорейцев была фраза «Всё может быть измерено».

До распада своего союза пифагорейцы изучали *«неразумные числа»*, которые мы сегодня называем иррациональными (от лат. *irrationalis* — неразумный). А один из последователей пифагорейцев, античный знаток пропорций *Архит Тарентский (ок. 428—365 гг. до н. э.)*, разработал метод нахождения приближённых значений иррациональных чисел.

## § 22 Квадратный корень из степени

В этом параграфе вы научитесь извлекать квадратный корень из чётной степени любого числа. Познакомитесь с одним из важнейших математических понятий — тождеством. Поймёте, что с некоторыми тождествами вы уже знакомы.

**Нужно вспомнить:**

- определение арифметического квадратного корня;
- понятие числа, противоположного данному;
- определение модуля числа;
- свойство возведения степени в степень;

- формулы сокращённого умножения;
- решение линейных неравенств;
- способы сравнения чисел;
- теорему о почленном умножении неравенств одного знака с положительными левой и правой частями;
- свойство возведения обеих частей неравенства с положительными левой и правой частями в одну и ту же степень.

Вычислим значение выражения $\sqrt{a^2}$ при $a=3$ и $a=-3$. По определению квадратного корня $\sqrt{3^2}=3$. При $a=-3$ находим $\sqrt{(-3)^2}=$ $=\sqrt{3^2}=3$. Так как число 3 является противоположным числу $-3$, то можно записать: $\sqrt{(-3)^2}=-(-3)$ или $\sqrt{(-3)^2}=|-3|$.

**ТЕОРЕМА 1** Для любого числа $a$ справедливо равенство

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Рассмотрим два случая: $a\geqslant 0$ и $a<0$.

1) При $a\geqslant 0$ по определению арифметического корня $\sqrt{a^2}=a$.

2) Если $a<0$, то $(-a)>0$, и поэтому $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a$. Таким образом, $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a<0, \end{cases}$ т. е. $\sqrt{a^2}=|a|$. ○

Например, $\sqrt{(-8)^2}=|-8|=8$.

Вместо того чтобы говорить, что равенство $\sqrt{a^2}=|a|$ выполняется при любых значениях входящих в него букв, говорят, что это равенство выполняется **тождественно**.

**!** Определение. Равенства, справедливые при любых значениях входящих в них букв, называют **тождествами**.

Приведём примеры тождеств:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ \ a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

**Задача 1.** Упростить: 1) $\sqrt{a^8}$; 2) $\sqrt{a^6}$.

▶ 1) $\sqrt{a^8}=\sqrt{(a^4)^2}=|a^4|$. Так как $a^4\geqslant 0$ при любом $a$, то $|a^4|=a^4$, и поэтому $\sqrt{a^8}=a^4$.

2) $\sqrt{a^6}=\sqrt{(a^3)^2}=|a^3|$. Если $a\geqslant 0$, то $a^3\geqslant 0$, и поэтому $|a^3|=a^3$. Если $a<0$, то $a^3<0$, и поэтому $|a^3|=-a^3$. Итак, в этом случае знак модуля следует оставить: $\sqrt{a^6}=|a^3|$. ◁

**ТЕОРЕМА 2** Если $a > b > 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

● В самом деле, если допустить, что $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$, то, возведя обе части неравенства в квадрат, получим $a \leqslant b$, что противоречит условию $a > b$. ○

Например, $\sqrt{256} > \sqrt{225}$, так как $256 > 225$; $3 < \sqrt{10} < 4$, так как $9 < 10 < 16$.

**Задача 2.** Упростить выражение $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}$.

► Используя тождество $\sqrt{a^2} = |a|$, получаем: $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} = |\sqrt{8}-3|$.

Так как $8 < 9$, то по теореме 2 получаем $\sqrt{8} < 3$. Поэтому $\sqrt{8}-3 < 0$ и $|\sqrt{8}-3| = -(\sqrt{8}-3) = 3-\sqrt{8}$.

Ответ. $3-\sqrt{8}$. ◁

**Задача 3.** Решить уравнение $\sqrt{(x-7)^2} = x-7$.

► Так как $\sqrt{(x-7)^2} = |x-7|$, то исходное равенство принимает вид: $|x-7| = x-7$.

Это равенство справедливо только при $x-7 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 7$.

Ответ. $x \geqslant 7$. ◁

**Задача 4.** Упростить выражение $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

► Заметим, что $7-4\sqrt{3} = 4-4\sqrt{3}+3 = (2-\sqrt{3})^2$.

Поэтому $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$, так как $2 = \sqrt{4}$, $\sqrt{4} > \sqrt{3}$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Сформулировать теорему о квадратном корне из квадрата числа.
2. Объяснить, почему при $a < 0$ верно равенство $\sqrt{a^2} = -a$.
3. Обосновать верность равенства $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} = 3-\sqrt{8}$.
4. Какое равенство называют тождеством?
5. Сформулировать теорему, которая позволяет сравнивать значения корней.

## Вводные упражнения

**1.** Назвать число, противоположное числу $-3$; $12$; $0$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{5}-1$.

**2.** Сравнить: 1) $\sqrt{2}$ и $2$; 2) $\sqrt{3}$ и $2$; 3) $3$ и $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{10}$ и $3$.

**3.** Найти модуль числа $-8$; $15$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-1$; $2-\sqrt{5}$.

**4.** Представить всеми возможными способами в виде квадрата целого числа $196$; $225$; $5^4$; $4^6$.

**5.** Найти два последовательных целых числа, между которыми заключено число $(4,7)^2$; $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$; $(0,3)^2$.

## Упражнения

**327.** Верно ли равенство:

1) $\sqrt{5^2}=5$; 2) $\sqrt{(-5)^2}=5$; 3) $\sqrt{(-5)^2}=-5$; 4) $\sqrt{(-5)^2}=|-5|$?

**328.** Найти значение выражения $\sqrt{x^2}$ при:

1) $x=1$; 2) $x=2$; 3) $x=0$; 4) $x=-2$.

**329.** Вычислить: 1) $\sqrt{3^6}$; 2) $\sqrt{2^8}$; 3) $\sqrt{5^4}$; 4) $\sqrt{11^4}$;

5) $\sqrt{(-3)^4}$; 6) $\sqrt{(-5)^6}$.

**330.** Упростить: 1) $\sqrt{n^8}$; 2) $\sqrt{x^{12}}$; 3) $\sqrt{a^{14}}$, $a>0$; 4) $\sqrt{b^6}$.

**331.** Найти значение выражения $\sqrt{x^2-2x+1}$ при:

1) $x=5$; 2) $x=1$; 3) $x=0$; 4) $x=-5$.

**332.** Сравнить числа:

1) $4$ и $\sqrt{15}$; 2) $2,7$ и $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{3,26}$ и $1,8$; 4) $\sqrt{18,49}$ и $4,3$.

**333.** Показать, что:

1) $4<\sqrt{17}<5$; 2) $3<\sqrt{10}<4$; 3) $3,1<\sqrt{10}<3,2$.

**334.** Найти два последовательных целых числа, между которыми заключено число: 1) $\sqrt{39}$; 2) $\sqrt{160}$; 3) $\sqrt{0,9}$; 4) $\sqrt{8,7}$.

**335.** Упростить:

1) $\sqrt{(4-\sqrt{5})^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$; 3) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{15}-4)^2}$.

**336.** Упростить выражение:

1) $\sqrt{(x-5)^2}$ при $x \geqslant 5$; 2) $\sqrt{(a+3)^2}$ при $a < -3$;

3) $\sqrt{1+4k+4k^2}$ при $k \geqslant -0{,}5$; 4) $\sqrt{a^2-6ab+9b^2}$ при $a < 3b$.

**337.** Доказать, что:

1) $a+5-\sqrt{(a-5)^2}=2a$, если $a \leqslant 5$;

2) $x+y+\sqrt{(x-y)^2}=\begin{cases}2x, \text{ если } x \geqslant y,\\ 2y, \text{ если } x < y.\end{cases}$

**338.** Решить уравнение:

1) $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$; 2) $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$.

**339.** Упростив, вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01: 1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

Диалог об истории

### Приближённые значения иррациональных чисел

Продолжу рассказ о том, как в древние времена математики находили приближённые значения квадратных корней из различных целых чисел.

Например, из найденных археологами клинописных табличек учёным удалось восстановить способ приближённого извлечения квадратного корня, которым пользовались в Вавилоне. С использованием современных обозначений этот способ может быть описан следующим образом. Пусть нужно найти $\sqrt{x}$. Число $x$ представляется в виде суммы $a^2+b$, где $a$ — ближайший к числу $x$ точный квадрат натурального числа $a$ $(a^2 \leqslant x)$, после чего используется формула

$$\sqrt{a^2+b} \approx a+\frac{b}{2a}. \qquad (*)$$

Извлечём, например, с её помощью корень квадратный из числа 28:

$$\sqrt{28}=\sqrt{\underset{a}{\underset{\cup}{5}}^2+\underset{b}{\underset{\cup}{3}}} \approx 5+\frac{3}{2\cdot 5}=5{,}3.$$

Результат извлечения квадратного корня из 28 с помощью микрокалькулятора равен 5,2915026, что незначительно отличается от результата, полученного с помощью формулы (*).

Интересно, а с помощью рациональных чисел древние учёные не записывали приближённые значения каких-нибудь часто используемых иррациональных чисел? Например, $\sqrt{2}$ или числа $\pi$?

Конечно, записывали. В геометрических расчётах приближёнными значениями числа $\pi$ пользовались часто. Использовали такие приближения: $\pi \approx 3$, $\pi \approx 3{,}14$. Архимед, не зная десятичных дробей, нашёл очень хорошее приближение числа $\pi$ обыкновенной дробью: $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Действительно, если разделить 22 на 7, то с точностью до сотых получается 3,14.

А значение $\sqrt{2}$ в Древней Индии вычисляли так:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Его значение примерно равно 1,4142156. Микрокалькулятор с точностью до десятитысячных показывает такое же число.

## § 23 Квадратный корень из произведения

Зная определение квадратного корня из числа и свойства степеней, можно найти значение выражения $\sqrt{25 \cdot 49}$. Действительно, $\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2} = \sqrt{(5 \cdot 7)^2} = 5 \cdot 7$. Но $5 \cdot 7 = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49}$.

Случайно ли получилось, что $\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49}$? В этом параграфе вы убедитесь, что корень из произведения любых неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел. Познакомитесь с действиями, упрощающими преобразования выражений с квадратными корнями: с вынесением числа из-под знака корня; с внесением числа под знак корня.

**Нужно вспомнить:**

- определение арифметического квадратного корня;
- разложение числа на простые множители;
- свойства степеней;
- формулы сокращённого умножения;
- теорему о квадратном корне из степени;
- теорему о сравнении значений корней.

**Задача 1.** Показать, что $\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$.

► $\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{400} = 20$; $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$. ◁

**ТЕОРЕМА** Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$,

т. е. корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

● Для того чтобы доказать, что $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ есть арифметический квадратный корень из $ab$, надо доказать, что:

$$1)\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0;\quad 2)\ (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab.$$

По определению квадратного корня $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} \geqslant 0$, поэтому $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. По свойству степени произведения и определению квадратного корня $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$. ○

Например, $\sqrt{2304} = \sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = 48$.

По доказанной теореме **при умножении корней** можно перемножить подкоренные выражения и из результата извлечь корень: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Например, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$.

Отметим, что теорема справедлива для любого числа неотрицательных множителей.

Например: $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

**!** Определение. Число $\sqrt{ab}$ называют **средним геометрическим** положительных чисел $a$ и $b$.

**Задача 2.** Найти среднее геометрическое чисел 54 и 24.

► $\sqrt{54 \cdot 24} = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{9 \cdot 36 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$. ◁

Пусть дано выражение $\sqrt{a^2b}$. Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то по теореме о корне из произведения можно записать:

$$\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}.$$

Такое преобразование называется **вынесением множителя из-под знака корня.**

**Задача 3.** Упростить выражение $2\sqrt{27} + \sqrt{12}$.

► $2\sqrt{27} + \sqrt{12} = 2\sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$. ◁

В некоторых случаях полезно **вносить множители под знак корня**, т. е. выполнять преобразование вида

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

**Задача 4.** Упростить выражение $3a\sqrt{\frac{b}{a}} - 2b\sqrt{\frac{a}{b}}$, где $a > 0$, $b > 0$.

▶ Внося положительные множители $a$ и $b$ под знак корня, получаем:

$$3a\sqrt{\frac{b}{a}} - 2b\sqrt{\frac{a}{b}} = 3\sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} - 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{a}{b}} = 3\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab} = \sqrt{ab}.\ \triangleleft$$

## Устные вопросы и задания

1. Сформулировать теорему о корне из произведения двух неотрицательных чисел.
2. Сформулировать теорему о корне из произведения нескольких неотрицательных чисел.
3. Можно ли произведение корней из неотрицательных чисел заменить корнем из произведения этих чисел?
4. Привести числовой пример: 1) вынесения множителя из-под знака корня; 2) внесения множителя под знак корня.
5. Какое преобразование можно выполнить, чтобы сравнить значения выражений: 1) $5\sqrt{5}$ и $3\sqrt{7}$; 2) $2\sqrt{18}$ и $3\sqrt{8}$?

## Вводные упражнения

1. Вычислить: 1) $5 \cdot \sqrt{49}$; 2) $-10 \cdot \sqrt{(-10)^2}$; 3) $-7 \cdot \sqrt{(-2)^4}$; 4) $\sqrt{3 \cdot 27}$.
2. Записать всеми возможными способами в виде квадрата числа следующие числа: 25; 121; 1,69; 22 500.
3. Представить в виде произведения квадратов двух натуральных чисел произведение $45 \cdot 5$; $7 \cdot 63$; $3 \cdot 48$.
4. Выполнить умножение: 1) $a^2 \cdot \frac{b}{a}$; 2) $4b^2 \cdot \frac{a^2}{b}$; 3) $\frac{y^2}{x^2} \cdot 3x$.
5. При каких значениях $a$ верно равенство $\sqrt{a^2} = -a$; $\sqrt{a^2} = a$?

## Упражнения

Вычислить (340—341).

**340.** 1) $\sqrt{49 \cdot 25}$; 2) $\sqrt{0{,}01 \cdot 169}$; 3) $\sqrt{625 \cdot 9 \cdot 36}$; 4) $\sqrt{256 \cdot 0{,}25 \cdot 81}$.

**341.** Найти среднее геометрическое чисел:

1) 8 и 50; 2) 32 и 50; 3) 108 и 27; 4) 27 и 12.

**342.** Вычислить с помощью разложения подкоренного выражения на множители:

1) $\sqrt{3136}$; 2) $\sqrt{6084}$; 3) $\sqrt{4356}$; 4) $\sqrt{1764}$.

Вычислить **(343—346)**.

**343.** 1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; 2) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{90}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}$;

4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}\cdot\sqrt{11}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{\frac{7}{8}}$.

**344.** 1) $\sqrt{113^2-112^2}$; 2) $\sqrt{82^2-18^2}$; 3) $\sqrt{65^2-63^2}$; 4) $\sqrt{313^2-312^2}$.

**345.** 1) $\sqrt{5^4\cdot 3^2}$; 2) $\sqrt{7^4\cdot 2^6}$; 3) $\sqrt{(-5)^6\cdot(0{,}1)^2}$; 4) $\sqrt{12^2\cdot 3^4}$.

**346.** 1) $(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2$; 2) $(\sqrt{7}-\sqrt{28})^2$;

3) $(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$; 4) $(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})$.

Вынести множитель из-под знака корня (буквами обозначены положительные числа) **(347—348)**.

**347.** 1) $\sqrt{16x}$; 2) $\sqrt{2x^2}$; 3) $\sqrt{5a^4}$; 4) $\sqrt{3a^6}$.

**348.** 1) $\sqrt{8y}$; 2) $\sqrt{75a^2}$; 3) $\sqrt{7m^8}$; 4) $\sqrt{50a^3}$.

**349.** Упростить выражение:

1) $3\sqrt{20}-\sqrt{5}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{18}+2\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{27}-\sqrt{12}$;

4) $2\sqrt{20}-2\sqrt{45}+\frac{1}{4}\sqrt{16}$; 5) $3\sqrt{48}-\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$.

**350.** Внести множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{28}$; 4) $10\sqrt{0{,}03}$.

**351.** Внести множитель под знак корня (буквами обозначены положительные числа):

1) $a\sqrt{a}$; 2) $a\sqrt{2}$; 3) $a\sqrt{\frac{1}{a}}$; 4) $\frac{1}{x^2}\sqrt{3x^5}$.

**352.** Сравнить: 1) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{40}$ и $4\sqrt{10}$; 3) $2\sqrt{45}$ и $4\sqrt{20}$.

**353.** Упростить:

1) $b\sqrt{\frac{a}{b}}+a\sqrt{\frac{b}{a}},\ a>0,\ b>0;$ 2) $\frac{2}{3}\sqrt{9x^3}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}},\ x>0.$

**354.** Вычислить:

1) $(\sqrt{5}-\sqrt{45})^2-(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{11}-\sqrt{13});$

2) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{7}+\sqrt{11})-(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2.$

**355.** Упростить выражение:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{128}+3\sqrt{2}+2\sqrt{72};$ 2) $3\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{80};$

3) $-\frac{2}{3}\sqrt{27}+\frac{1}{5}\sqrt{300}+5\sqrt{3};$ 4) $2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}.$

**356.** Упростить выражение (буквами обозначены положительные числа):

1) $\frac{1}{3}\sqrt{9x^5}+\frac{1}{2}\sqrt{4x^3}-x\sqrt{x}+x\sqrt{x^3};$

2) $3\sqrt{0{,}04a^3b^3}-2\sqrt{0{,}25a^3b^5}+4b\sqrt{\frac{1}{16}a^3b^3}.$

**357.** Разложить на множители по образцу ($a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$)

$$9-a=(3-\sqrt{a})(3+\sqrt{a}):$$

1) $25-a;$ 2) $b-16;$ 3) $0{,}01-a;$ 4) $b-\frac{9}{49}.$

**358.** Сократить дробь ($a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$):

1) $\frac{25-a}{5+\sqrt{a}};$ 2) $\frac{b-16}{4+\sqrt{b}};$ 3) $\frac{0{,}49-a}{\sqrt{a}+0{,}7};$ 4) $\frac{0{,}81-b}{0{,}9+\sqrt{b}}.$

**359.** Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:

1) $\sqrt{23}\cdot\sqrt{51};$ 2) $\sqrt{123}\cdot\sqrt{63};$ 3) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{19};$

4) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{21};$ 5) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{13};$ 6) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}.$

**360.** Доказать равенство

$$\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}},\ \text{если}\ a\geqslant\sqrt{b},\ b\geqslant 0.$$

**361.** Построить график функции:

1) $y=\sqrt{x^2};$ 2) $y=\sqrt{(x-1)^2}.$

Шаг вперёд

## Суммы корней

Вы научились сравнивать значения двух корней. Например, $\sqrt{2011} < \sqrt{2012}$, так как $2011 < 2012$. А сможете ли вы сравнить значения выражений $A$ и $B$, если $A = \sqrt{2011} + \sqrt{2014}$ и $B = \sqrt{2012} + \sqrt{2013}$?

Подкоренные выражения — четыре последовательных натуральных числа, а сравнить нужно сумму корней из наибольшего и наименьшего чисел с суммой корней из двух средних... Кажется, что $A < B$. А как это проверить или доказать, я пока не знаю.

Давайте рассмотрим общую задачу сравнения чисел $C = \sqrt{n} + \sqrt{n+3}$ и $D = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$. Сравним с нулём разность чисел $C$ и $D$. Запишем её в удобном виде:

$$C - D = (\sqrt{n} + \sqrt{n+3}) - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) =$$
$$= (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Теперь умножим и разделим каждое выражение в скобках на сопряжённое с ним число:

$$\frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \cdot (\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} - \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$
$$= \frac{(\sqrt{n+3})^2 - (\sqrt{n+2})^2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} - \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$
$$= \frac{n+3-n-2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} - \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Очевидно, что знаменатель дроби уменьшаемого больше знаменателя дроби вычитаемого, значит, первая дробь меньше второй (числители у них одинаковые). Таким образом, $C - D < 0$, т. е. $C < D$, значит, и $\sqrt{2011} + \sqrt{2014} < \sqrt{2012} + \sqrt{2013}$.

Поговорим об истории. Арабские учёные в Средние века изучали и комментировали X книгу «Начал» Евклида, в которой на геометрической основе изложено учение о квадратной иррациональности. Например, в трактате *Махаммеда ал Багдади (жившего в XI в.)* можно найти такие примеры применения формул Евклида: $\sqrt{10} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 \pm \sqrt{320}}$, $\sqrt{6 \pm \sqrt{20}} = \sqrt{5} \pm 1$.

Эти равенства у Багдади были записаны без знаков арифметического корня?

Тогда они были описаны словами. Словесно были описаны и выведенные арабскими учёными любопытные формулы:

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b} \text{ (где } a>0,\ b>0,\ a \neq b).$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \text{ (где } a \geqslant \sqrt{b} \text{ и } b \geqslant 0).$$

С первой формулой всё понятно — числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ умножили на $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. А как получили вторую формулу — не знаю, но хочу проверить её хотя бы для некоторых чисел и, например, для знака «+». Пусть $a=5$, $b=9$, тогда в левой части получим $\sqrt{5+\sqrt{9}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

В правой части получим $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5^2-9}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5^2-9}}{2}} = \sqrt{\frac{5+4}{2}} + \sqrt{\frac{5-4}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Действительно, левая и правая части равны. Не доказала, конечно, что формула верна для всех $a$ и $b$, но поверила. Может быть, кто-то сможет её доказать?

# § 24 Квадратный корень из дроби

Вы познакомитесь с теоремой, которая в ряде случаев помогает упрощать выражения, содержащие дроби под знаком арифметического квадратного корня. Познакомитесь с важным соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, которое имеет широкое применение в задачах геометрии, физики и техники.

**Нужно вспомнить:**

- определение арифметического квадратного корня из числа;
- тождество $\sqrt{a^2} = |a|$;
- теорему о корне из произведения;
- формулы сокращённого умножения;
- понятие числового неравенства.

**Задача 1.** Показать, что $\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$.

► $\sqrt{\frac{25}{36}}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{5}{6}$, $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}$. ◁

**ТЕОРЕМА**

**Если $a\geqslant 0$, $b>0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,**

**т. е. корень из дроби равен корню из числителя, делённому на корень из знаменателя.**

● Требуется доказать, что: 1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 0$; 2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$.

Так как $\sqrt{a}\geqslant 0$ и $\sqrt{b}>0$, то $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 0$. По свойству возведения дроби в степень и определению квадратного корня получаем:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}. \ \circ$$

Например, $\sqrt{\frac{121}{225}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{225}}=\frac{11}{15}$.

По доказанной теореме **при делении корней** можно разделить подкоренные выражения и из результата извлечь корень:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Например, $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{72}{2}}=\sqrt{36}=6$.

В некоторых задачах полезно **избавиться от иррациональных выражений в знаменателе дроби.**

Пусть дано выражение $\frac{a}{\sqrt{b}}$, где $b>0$. Умножая числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{b}$, получаем $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{b}$.

Например: $\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Задача 2.** Исключить иррациональность в знаменателе: $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

▶ Если умножить разность $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ на сумму $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, то получится выражение, не содержащее корней. Поэтому

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3}=\frac{5+2\sqrt{15}+3}{2}=4+\sqrt{15}.\ \triangleleft$$

**Задача 3.** Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел $a$ и $b$ не меньше среднего геометрического этих чисел:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}. \qquad (1)$$

▶ Требуется доказать, что $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0$.

Преобразуя левую часть этого неравенства, получаем:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0.\ \triangleleft$$

Заметим, что в соотношении (1) знак равенства имеет место только при $a=b$.

**Задача 4.** Продавец взвешивает яблоки на рычажных весах. Покупатель попросил взвесить ему 1 кг яблок, а затем ещё 1 кг, но поменяв местами при втором взвешивании гирю и яблоки. Кто понёс убытки, если весы не отрегулированы?

▶ Пусть $a$ и $b$ — плечи весов (рис. 32). При первом взвешивании покупатель приобрёл $x$ килограммов яблок. Из курса физики известно, что $x\cdot b=1\cdot a$, откуда $x=\frac{a}{b}$. При втором взвешивании покупатель приобрёл $y$ килограммов яблок. Из условия равновесия $y\cdot a=1\cdot b$ находим $y=\frac{b}{a}$. Итак, было куплено $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ килограммов яблок. Используя неравенство для среднего арифметического и геометрического чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$, получаем $\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}$, откуда $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

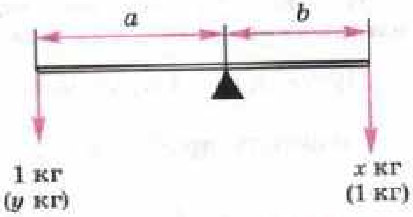


Рис. 32

Ответ. Убыток понёс продавец, если $a\neq b$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Сформулировать теорему о корне из дроби.
2. Какое свойство степени с натуральным показателем применяется при доказательстве теоремы о корне из дроби?
3. Можно ли отношение квадратных корней из положительных чисел заменить квадратным корнем из отношения этих чисел?
4. Как избавиться от иррациональности в знаменателе: $\frac{5}{\sqrt{7}}$; $\frac{5}{2-\sqrt{7}}$; $\frac{5}{3+\sqrt{7}}$; $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$?
5. Сравнить среднее арифметическое и среднее геометрическое положительных чисел $m$ и $n$.

## Вводные упражнения

1. Вычислить: 1) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$; 3) $\sqrt{\frac{8}{27}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2. Найти значение выражения: 1) $\frac{\sqrt{16}}{2}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{25}}$; 3) $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{121}}$; 4) $\frac{\sqrt{7^4}}{\sqrt{7^2}}$.

3. Упростить выражение:

1) $\sqrt{18}-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{12}-\sqrt{75}$; 3) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$;

4) $(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2$; 5) $(\sqrt{1,31})^2$; 6) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)^2$.

## Упражнения

Вычислить (**362—365**).

**362.** 1) $\sqrt{\frac{9}{100}}$; 2) $\sqrt{\frac{100}{49}}$; 3) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; 4) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$.

**363.** 1) $\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{\frac{1}{9}}$; 2) $5\sqrt{\frac{1}{25}}-3\sqrt{\frac{1}{9}}$; 3) $\sqrt{\frac{25}{64}}+\sqrt{\frac{49}{144}}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{81}}-\sqrt{\frac{169}{225}}$.

**364.** 1) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{8}}$; 3) $\frac{4\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{20\sqrt{18}}{5\sqrt{2}}$.

**365.** 1) $\sqrt{\frac{64\cdot 49}{196\cdot 324}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}\cdot 11\frac{14}{25}}$; 3) $\sqrt{\frac{9}{16}\cdot\frac{4}{81}\cdot\frac{36}{169}}$; 4) $\sqrt{\frac{9}{16}\cdot 5^2}$.

**366.** Исключить иррациональность из знаменателя:

1) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$;

5) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; 6) $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; 7) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; 8) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{\sqrt{10}-\sqrt{8}}$.

**367.** На микрокалькуляторе вычислить с точностью до 0,01 разность между средним арифметическим и средним геометрическим чисел:

1) 17 и 39; 2) 71 и 86; 3) 134,2 и 243,1; 4) 150,3 и 210,4.

**368.** Площадь одного квадрата 72 см$^2$, а площадь другого квадрата 2 см$^2$. Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго квадрата?

**369.** Извлечь корень:

1) $\sqrt{\frac{25a^8}{49}}$; 2) $\sqrt{\frac{121x^4}{64}}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{4a^2}}$, где $a>0$; 4) $\sqrt{\frac{400}{a^2}}$, где $a<0$.

**370.** Упростить выражение:

1) $(x-3)\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+9}}$ при: а) $x>3$; б) $x<3$;

2) $(2-a)\sqrt{\frac{1}{a^2-4a+4}}$ при: а) $a>2$; б) $a<2$.

**371.** Вычислить:

1) $\frac{3}{2+\sqrt{6}}+\frac{3}{2-\sqrt{6}}$; 2) $\frac{5}{3-\sqrt{11}}+\frac{5}{3+\sqrt{11}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{11}-3}-\frac{7}{\sqrt{11}-2}$;

4) $\frac{3}{3+\sqrt{6}}+\frac{2}{2+\sqrt{6}}$; 5) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}-\frac{2}{\sqrt{7}+3}-2\sqrt{7}$.

**372.** Доказать с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, что для любых положительных чисел $a$ и $b$ выполняется неравенство $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geqslant 2$.

**373.** Упростить выражение:

1) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{b}$; 2) $2(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 3) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}$.

**374.** Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{26}}$; 2) $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{46}}$; 3) $\frac{\sqrt{26}\cdot\sqrt{35}}{\sqrt{22}}$; 4) $\frac{\sqrt{54}\cdot\sqrt{67}}{\sqrt{39}}$; 5) $\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{17}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{45}}$.

**375.** Доказать, что для любых положительных чисел $a$ и $b$ справедливо неравенство:

1) $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$; 2) $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{b}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

**376.** Построить график функции:

1) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

Шаг вперёд

### Математические узоры

Профессор, почему нам учитель часто говорит: «Повторим..., нужно вспомнить...»? Разве без повторения старого я не смогу решить, например, задачу на действия с квадратными корнями?

В математике многие темы связаны друг с другом. Помнишь наше сравнение математических рассуждений с вязанием красивых узоров? Давайте ещё раз в этом убедимся с помощью конкретной задачи.

Попробуйте, например, доказать, что для любых неотрицательных чисел $a$, $b$ и $c$ справедливо неравенство

$$a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}.$$

Если вы забыли ранее пройденный материал, то решение этой интересной задачи окажется вам не под силу. Для доказательства данного неравенства нужно хорошо знать свойства неравенств, уметь выполнять определённые действия с неравенствами, помнить формулы сокращённого умножения.

Да, формулы сокращённого умножения мы использовали при изучении этого параграфа в задаче 3. Может быть, как раз формула $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ нам поможет при доказательстве неравенства?

Молодец, Тёма. У тебя хорошая интуиция. Действительно, если сложить почленно три неравенства

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad \frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac}, \quad \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc},$$

справедливые для неотрицательных чисел $a$, $b$ и $c$, то получим неравенство $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$, которое и хотели доказать.

Попробуйте теперь самостоятельно доказать, что для любых неотрицательных чисел $a$, $b$ и $c$ справедливо неравенство

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc.$$

Подсказка: понадобится знание формул параграфа.

Вот ещё задача, в которой нужно применить знания, полученные в этом параграфе, а также идеи, с которыми я вас знакомил в прошлом году:

«Упростите выражение $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$».

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

**377.** Вычислить: 1) $(\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt{0{,}1})^2$; 3) $\left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^2$; 4) $\sqrt{\left(3\frac{1}{3}\right)^2}$.

**378.** Что больше:

1) $\sqrt{17}$ или $\sqrt{82}$; 2) $\sqrt{0{,}2}$ или $\sqrt{0{,}3}$;

3) 3 или $\sqrt{10}$; 4) 5 или $\sqrt{24}$?

Вычислить (379—382).

**379.** 1) $\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$; 2) $\sqrt{72\cdot 6\cdot 45\cdot 15}$; 3) $\sqrt{900\cdot 25\cdot 1{,}69}$.

**380.** 1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{63}$; 2) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{98}$; 3) $\sqrt{75}\cdot\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$.

**381.** 1) $\frac{4\sqrt{72}}{3\sqrt{8}}$; 2) $\frac{2\sqrt{63}}{\sqrt{28}}$; 3) $\frac{2\sqrt{45}}{\sqrt{80}}$; 4) $\frac{4\sqrt{99}}{9\sqrt{44}}$.

**382.** 1) $\sqrt{2^8}$; 2) $\sqrt{3^6}$; 3) $\sqrt{5^4}$; 4) $\sqrt{6^6}$; 5) $\sqrt{(-3)^6}$; 6) $\sqrt{(-7)^4}$.

**383.** Упростить:

1) $3\sqrt{20}+\sqrt{28}+\sqrt{45}-\sqrt{63}$; 2) $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}-8\sqrt{\frac{3}{8}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cdot 3\sqrt{\frac{3}{2}}$;

3) $(6\sqrt{45}-3\sqrt{20}+9\sqrt{80}):(3\sqrt{5})$;

4) $(7\sqrt{8}-14\sqrt{18}+0{,}7\sqrt{12}):(7\sqrt{2})$;

5) $\frac{5}{1+\sqrt{6}}+\frac{6}{3+\sqrt{6}}$; 6) $\frac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

**384.** Сократить дробь:

1) $\frac{5a^2-35}{a-\sqrt{7}}$; 2) $\frac{x^3-3x}{x+\sqrt{3}}$; 3) $\frac{5x-5\sqrt{3}}{3-x^2}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b-16a}$; 5) $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$.

**385.** Решить уравнение:

1) $\sqrt{x-1}=4$; 2) $\sqrt{x+9}=5$; 3) $\sqrt{2(x-1)}=2$; 4) $\sqrt{2x-7}=1$.

**386.** При каких значениях $x$ справедливо равенство:

1) $|x-2|=x-2$; 2) $|3-x|=x-3$;

3) $\sqrt{(x+3)^2}=x+3$; 4) $\sqrt{(5-2x)^2}=2x-5$?

$\boxed{\textbf{387.}}$ Упростить выражение:

1) $y=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$ при: а) $x<1$; б) $1\leqslant x\leqslant 3$; в) $x>3$.

2) $y=\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2-10a+25}$ при: а) $a<2$; б) $2\leqslant a\leqslant 5$; в) $a>5$.

**388.** Найти значение выражения $2x^2-5ax+2a^2$ при $x=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ и $a=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

**389.** Упростить выражение:

1) $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{a^2b}{a-b}$; 2) $\left(\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}+\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{a-\sqrt{b}}{a^2+b}$;

3) $\left(\frac{c-\sqrt{d}}{c+\sqrt{d}}-\frac{c+\sqrt{d}}{c-\sqrt{d}}\right):\frac{2c\sqrt{d}}{c+\sqrt{d}}$; 4) $(2+\sqrt{b})\left(\frac{2}{\sqrt{b}+2}-\frac{2}{2-\sqrt{b}}+\frac{2b}{4-b}\right)$.

**390.** Сумма двух чисел равна $\sqrt{14}$, а их разность $\sqrt{10}$. Доказать, что произведение этих чисел равно 1.

**391.** Упростить:

1) $\sqrt{xy}\cdot\left(\frac{x}{y}\sqrt{xy}-2\sqrt{\frac{y}{x}}-\sqrt{\frac{1}{xy}}\right)$, где $x>0$, $y>0$;

2) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{ab}}-\frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}-b\sqrt{\frac{b}{a}}\right):\sqrt{ab}$, где $a>0$, $b>0$.

**392.** Исключить иррациональность из знаменателя:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; 4) $\frac{5-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-9}$.

**393.** Доказать, что если $a>0$, $b>0$, то $a-\sqrt{ab}+b \geqslant \sqrt{ab}$.

**394.** Вычислить на микрокалькуляторе приближённое значение корня с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{4{,}6}$; 2) $\sqrt{2{,}13}$; 3) $\sqrt{3{,}148}$; 4) $\sqrt{13{,}69}$.

**395.** На микрокалькуляторе вычислить с точностью до 0,001 значение выражения $\sqrt{a+\frac{1}{a}-2}$ при:

1) $a=1{,}1$; 2) $a=1{,}19$; 3) $a=0{,}81$; 4) $a=0{,}9$.

**396.** Вычислить значение выражения $\sqrt{3x^2+8x-9}$ с точностью до 0,1, если:

1) $x=3$; 2) $x=4$; 3) $x=5{,}5$;
4) $x=6{,}3$; 5) $x=-25$; 6) $x=-31$.

**397.** Доказать, что если $a>0$ и $b>0$, то $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

**398.** Доказать, что для любых чисел $a$ и $b$ справедливо неравенство $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

**399.** Упростить выражение:

1) $y=\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2-12x+36}$ при: а) $x<4$; б) $4 \leqslant x \leqslant 6$; в) $x>6$;

2) $y=\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{9x^2-6x+1}$ при: а) $x<\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; в) $x>\frac{1}{2}$.

**400.** Сравнить $\sqrt{a+b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В испытании металлов на твёрдость по методу вдавливания Бринелля в качестве наконечника давящего инструмента используется стальной шарик диаметром $D$, а результат оценивается при измерении силы вдавливания шарика $F$ и диаметра $d$ основания полученного отпечатка (рис. 33). Формула

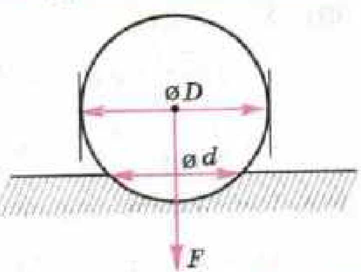


Рис. 33

твёрдости металла $T$, рассчитанная по этому методу, имеет вид

$$T = \frac{2F}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}.$$

Вычислить с точностью до 1 Н/мм$^2$ твёрдость металла, если:
1) $F = 1000$ Н, $D = 10$ мм, $d = 3$ мм;
2) $F = 1000$ Н, $D = 10$ мм, $d = 4$ мм.

**2.** Наибольшее расстояние $S$ (км) от передающей антенны, на котором можно принять телепередачу, находится по формуле $S = 4{,}12(\sqrt{H} + \sqrt{h})$, где $H$ — высота (м), на которой находится передающая антенна, $h$ — высота (м), на которой находится приёмная антенна. Вычислить расстояние $S$ с точностью до 0,1 км, если $H = 380$ м, $h = 30$ м.

**3.** Время $t$ половинного слива наполненной водой горизонтально расположенной цилиндрической цистерны диаметром $D$ и длиной $l$ через круглое отверстие диаметром $d$ в дне цистерны (рис. 34) находится по формуле $t = \frac{4lD\sqrt{D}}{3\pi m d^2 \sqrt{g}}$, где $g$ — ускорение свободного падения, $m$ — коэффициент расхода отверстия. Найти с точностью до 1 с время половинного слива цистерны (приняв $m = 0{,}6$, $g = 10$ м/с$^2$), если:
1) $D = 1$ м, $d = 0{,}05$ м, $l = 1{,}5$ м;
2) $D = 2$ м, $d = 0{,}1$ м, $l = 5$ м.

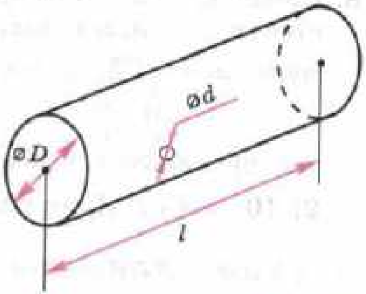



Рис. 34

**4.** На практике при малых значениях положительного числа $a$ приближённые значения выражений $\sqrt{1+a}$ и $\sqrt{1-a}$ находят по формулам $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}$ и $\sqrt{1-a} \approx 1 - \frac{a}{2}$ соответственно. Используя эти формулы, найти: 1) $\sqrt{1{,}004}$; 2) $\sqrt{0{,}992}$ и сравнить полученное число со значением заданного выражения, найденным с точностью до 0,001 при помощи микрокалькулятора.

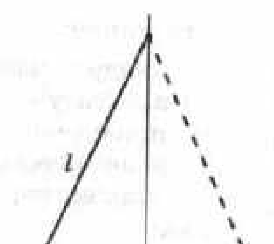



Рис. 35

**5.** Период колебания маятника (рис. 35) находится по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где

$l$ — длина маятника (длина нити от места подвеса до центра тяжести грузика, выраженная в метрах), $g$ — ускорение свободного падения.

Выразить из данной формулы длину маятника и найти её значение, если $T = 1{,}1$ с; $T = 2{,}2$ с. В расчётах принять: $g = 9{,}8$ м/с$^2$, $\pi = 3{,}14$.

6. Объём $V$ конуса находится по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где $H$ — высота конуса, $R$ — радиус основания (рис. 36). Выразить из этой формулы радиус основания конуса.

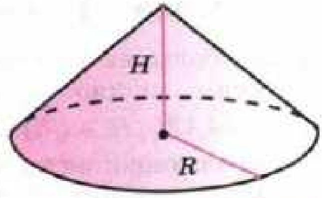



Рис. 36

7. Первую космическую скорость $v$ (скорость вывода спутника на круговую орбиту) можно найти по формуле $v = \sqrt{Rg}$, где $R$ — радиус Земли, $g$ — ускорение свободного падения. Высоту полёта спутника считают много меньше $R$. С помощью микрокалькулятора найти первую космическую скорость, приняв $R = 6400$ км, $g = 9{,}8$ м/с$^2$.

8. Начальная масса тела $m_0$ при движении со скоростью $v$ меняется и достигает величины $m$, которую можно найти по формуле $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, где $c$ — скорость света. На сколько процентов увеличится масса тела при движении со скоростью: 1) $\frac{c}{2}$; 2) $10^5$ км/с? Принять скорость света $c = 3 \cdot 10^5$ км/с.

## В этой главе вы узнали,

что такое:

— квадратный корень из числа;
— арифметический квадратный корень из числа;
— иррациональное число;
— действительное число;
— тождество;

как:

— записывать рациональное число в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби;
— представлять бесконечную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби;

— сравнивать действительные числа и выполнять арифметические действия с ними;
— извлекать квадратный корень из степени; произведения; дроби;
— сравнивать значения корней из разных чисел;
— вносить множитель под знак корня;
— выносить множитель из-под знака корня;
— избавляться от иррациональности в знаменателе дроби;
— сравнивать среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел.

## ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

**I уровень**

**1.** Сравнить: а) $7$ и $\sqrt{48}$; б) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$.

**2.** Вычислить: а) $\sqrt{81\cdot 49}$; б) $\sqrt{0{,}3\cdot 120}$; в) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; д) $\sqrt{(-17)^2}$; е) $\sqrt{3^6}$.

**3.** Упростить выражение:
а) $3\sqrt{8}+\sqrt{2}-3\sqrt{18}$; б) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$; в) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$.

**4.** Вынести множитель из-под знака корня: $\sqrt{8a^3}$, $a\geqslant 0$.

**5.** Сократить дробь: а) $\dfrac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$.

**6.** Исключить иррациональность из знаменателя:
а) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

**II уровень**

**7.** Сравнить: а) $4{,}6$ и $\sqrt{22}$; б) $2\sqrt{37}$; и $5\sqrt{6}$.

**8.** Упростить выражение: а) $\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{\sqrt{5}-1}$;
б) $(\sqrt{27}+\sqrt{12}+5)(1-\sqrt{3})$; в) $\dfrac{2\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2}$; г) $\dfrac{\sqrt{4(x-y)^2}}{x-y}$ при $x<y$.

**9.** Внести множитель под знак квадратного корня: $xy^2\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}$, если $x\geqslant 0$, $y>0$.

**10.** Сократить дробь $\dfrac{1-2\sqrt{x}+x}{x-1}$, если $x>1$.

**11.** Исключить иррациональность из знаменателя: $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

III уровень

**12.** Найти наименьшее целое число, большее чем $\sqrt{17}$.

**13.** Извлечь корень из произведения: $\sqrt{2x \cdot 5y \cdot 8x \cdot 20y}$.

**14.** Упростить выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{8})^2}}{\sqrt{3}-2}$; б) $\left(\dfrac{4}{x-y}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{xy}-x}{\sqrt{y}}$.

**15.** Исключить иррациональность из знаменателя:

а) $\dfrac{x-7}{\sqrt{x+2}-3}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$.

**16.** Решить уравнение $\sqrt{(3x-8)^2}=8-3x$.

## ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Среднее арифметическое и среднее геометрическое в алгебре и геометрии.
2. История появления иррациональных чисел.
3. Решение задач на доказательство неравенств, содержащих квадратные корни.
4. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки.
5. Алгоритмы извлечения квадратного корня из многозначного числа.
6. Каких чисел больше, рациональных или иррациональных?
7. Доказательство справедливости неравенства $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<$ $<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ для любого натурального $n$.
8. Итерационный метод Герона нахождения приближённого значения квадратного корня из положительного числа.

# ГЛАВА IV

# Квадратные уравнения

В 7 классе вы научились решать уравнения первой степени с одним неизвестным. Убедились в том, что уравнение вида $ax=b$ является моделью многих физических, математических и бытовых явлений. В природе, технике и науке существует немало процессов, описываемых с помощью уравнений, в которых неизвестное число встречается не только в первой, но и во второй степени.

Потребность решать уравнения такого вида возникла ещё в древности, когда появились задачи нахождения площадей земельных участков, разнообразные астрономические и математические задачи. Современные учёные установили, что уравнения, в которых неизвестная встречается во второй степени, умели решать ещё в Древнем Вавилоне. Правда, они ещё не знали отрицательных чисел, поэтому, например, решая уравнение

$$x^2=9,$$

они находили лишь его положительный корень $x=3$. Вы уже понимаете, что $x=-3$ также является корнем уравнения $x^2=9$, т. е. ваши знания в чём-то превосходят знания древних учёных. Однако они могли найти положительный корень, например, уравнения

$$x^2+x=\frac{3}{4}.$$

Это уравнение встретилось археологам в древних клинописных текстах. Большинство из вас вряд ли пока сможет его решить.

Изучив эту главу, вы сможете решать уравнения вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где $a$, $b$, $c$ — заданные числа, $a \neq 0$. Научитесь решать практические и прикладные задачи, математической моделью которых является уравнение данного вида.

# § 25 Квадратное уравнение и его корни

В этом параграфе будет введено понятие квадратного уравнения. На примере решения геометрической задачи будет продемонстрирована важность умения решать квадратные уравнения. Способ нахождения корней простейшего квадратного уравнения вида $x^2=d$ в параграфе обоснован с помощью хорошо знакомых вам формул, правил и определений.

**Нужно вспомнить:**

- понятия уравнения и его корня;
- что значит решить уравнение;
- свойства уравнений;
- разложение многочлена на множители способом группировки; с помощью формулы разности квадратов;
- понятие квадратного корня из числа;
- определение арифметического квадратного корня;
- правила извлечения квадратного корня из произведения и дроби.

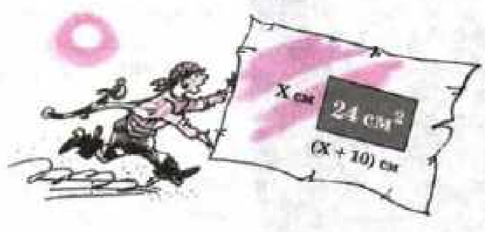
**Задача 1.** Основание прямоугольника больше высоты на 10 см, а его площадь равна 24 см². Найти высоту прямоугольника.

▶ Пусть $x$ сантиметров — высота прямоугольника, тогда его основание равно $(x+10)$ сантиметров. Площадь этого прямоугольника равна $x(x+10)$ см². По условию задачи $x(x+10)=24$. Раскрывая скобки и перенося число 24 с противоположным знаком в левую часть уравнения, получаем:

$$x^2+10x-24=0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители способом группировки:

$$\begin{aligned}&x^2+10x-24=\\&=x^2+12x-2x-24=\\&=x(x+12)-2(x+12)=\\&=(x+12)(x-2).\end{aligned}$$




Следовательно, уравнение можно записать так:

$$(x+12)(x-2)=0.$$

Это уравнение имеет корни $x_1=-12$, $x_2=2$. Так как длина отрезка не может быть отрицательным числом, то искомая высота равна 2 см. ◁

При решении задачи было получено уравнение $x^2+10x-24=0$, которое называют квадратным.

**Определение.** **Квадратным уравнением** называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

где $a$, $b$, $c$ — заданные числа, $a \neq 0$, $x$ — неизвестное.

Коэффициенты $a$, $b$, $c$ квадратного уравнения обычно называют так: $a$ — **первым** или **старшим коэффициентом**, $b$ — **вторым коэффициентом**, $c$ — **свободным членом**.

Например, в уравнении $3x^2-x+2=0$ старший коэффициент 3, второй коэффициент $-1$, свободный член 2.

Решение многих задач математики, физики, техники сводится к решению квадратных уравнений.

Приведём ещё примеры квадратных уравнений:

$$2x^2+x-1=0,\ 5t^2-10t+3=0,\ x^2-25=0,\ 2x^2=0.$$

При решении многих задач получаются уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований сводятся к квадратным. Например, уравнение $2x^2+3x=x^2+2x+2$ после перенесения всех его членов в левую часть и приведения подобных членов сводится к квадратному уравнению $x^2+x-2=0$.

**Задача 2.** Решить уравнение $x^2=64$.

▶ Перенесём 64 в левую часть, получим квадратное уравнение $x^2-64=0$. Разложим левую часть на множители:

$$(x-8)(x+8)=0.$$

Значит, уравнение имеет два корня: $x_1=8$, $x_2=-8$. ◁

Заметим, что первый корень уравнения $x^2=64$ является арифметическим корнем из числа 64, а второй — противоположным ему числом: $x_1=\sqrt{64}$, $x_2=-\sqrt{64}$.

Эти две формулы обычно объединяют в одну: $x_{1,2}=\pm\sqrt{64}$.

Ответ к задаче 2 можно записать так: $x_{1,2}=\pm 8$. Уравнение $x^2=64$ является частным случаем уравнения вида $x^2=d$.

**ТЕОРЕМА** Уравнение $x^2=d$, где $d>0$, имеет два корня:

$$x_1=\sqrt{d},\quad x_2=-\sqrt{d}.$$

Перенесём $d$ в левую часть уравнения: $x^2 - d = 0$. Так как $d > 0$, то по определению арифметического квадратного корня $d = (\sqrt{d})^2$. Поэтому уравнение можно записать так:

$$x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0.$$

Разложим левую часть этого уравнения на множители, получим:

$$(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0,$$

откуда $x_1 = \sqrt{d}$, $x_2 = -\sqrt{d}$.

Например, уравнение $x^2 = \frac{4}{9}$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$; уравнение $x^2 = 3$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; уравнение $x^2 = 8$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

Если в уравнении $x^2 = d$ правая часть равна нулю, то **уравнение $x^2 = 0$ имеет один корень $x = 0$.** Так как уравнение $x^2 = 0$ можно записать в виде $x \cdot x = 0$, то иногда говорят, что уравнение $x^2 = 0$ имеет два равных корня: $x_{1,2} = 0$.

**Если $d < 0$, то уравнение $x^2 = d$ не имеет действительных корней,** так как квадрат действительного числа не может быть отрицательным числом. Например, уравнение $x^2 = -25$ не имеет действительных корней.

## Устные вопросы и задания

1. Обосновать каждый этап решения уравнения $x(x+10) = 24$ в задаче 1 текста параграфа.
2. Уравнение какого вида называют квадратным? Как называется каждый из коэффициентов этого уравнения?
3. Привести пример квадратного уравнения и назвать его коэффициенты.
4. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = d$, если $d > 0$; $d = 0$; $d < 0$?
5. Назвать корни уравнения $x^2 = d$ при $d > 0$.
6. Привести пример квадратного уравнения 1) не имеющего действительных корней; 2) имеющего один корень; 3) имеющего два различных корня.

## Вводные упражнения

1. Установить, является ли число $-2$ корнем уравнения:

   1) $x - 1 = -3$;  2) $(x-2)(x+3) = 0$;  3) $\sqrt{x^2} = 2$;  4) $|x| = 2$.

2. Вычислить: $(\sqrt{7})^2$; $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{\frac{25}{49}}$; $\sqrt{36 \cdot 64}$.

3. Разложить на множители:

1) $x^2-81$; 2) $3x^2-75$; 3) $x^2-2$;

4) $2x^2-10$; 5) $x^2-6x+9$; 6) $x^2+8x$.

4. Решить уравнение:

1) $3x-7=0$; 2) $2x-8=3x+2$;

3) $(x+12)(x-4)=0$; 4) $(x-6)(2x+1)=0$.

## Упражнения

**401.** (Устно.) Какие из данных уравнений являются квадратными:

1) $5x^2-14x+17=0$; 2) $\frac{2}{3}x^2+4=0$; 3) $-7x^2-13x+8=0$;

4) $17x+24=0$; 5) $-13x^4+26=0$; 6) $x^2-x=0$?

**402.** (Устно.) Назвать коэффициенты и свободный член квадратного уравнения:

1) $5x^2-14x+17=0$; 2) $\frac{2}{3}x^2+4=0$; 3) $-x^2+x+\frac{1}{3}=0$;

4) $-7x^2-13x+8=0$; 5) $x^2+25x=0$; 6) $-x^2-x=0$.

**403.** Записать квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, если известны его коэффициенты:

1) $a=2$, $b=3$, $c=4$; 2) $a=-1$, $b=0$, $c=9$;

3) $a=1$, $b=-5$, $c=0$; 4) $a=1$, $b=0$, $c=0$.

**404.** Привести данное уравнение к виду квадратного:

1) $x(x-3)=4$; 2) $(x-3)(x-1)=12$;

3) $3x(x-5)=x(x+1)-x^2$; 4) $7(x^2-1)=2(x+2)(x-2)$.

**405.** Какие из чисел $-3$, $-2$, $0$, $-1$, $1$, $2$, $3$ являются корнями уравнения:

1) $x^2-9=0$; 2) $x^2+x-6=0$; 3) $(x-1)(x+2)=0$;

4) $x^2-x=0$; 5) $x^2-5x+6=0$; 6) $(x+1)(x-3)=x$?

**406.** (Устно.) Сколько корней имеет уравнение $x^2=36$? Найти их. Какой из них является арифметическим корнем из 36?

**407.** (Устно.) Решить уравнение:

1) $x^2=1$;  2) $x^2=9$;  3) $x^2=16$;
4) $x^2=25$;  5) $x^2=100$;  6) $x^2=0$.

**408.** Найти корни уравнения:

1) $x^2=\frac{9}{16}$;  2) $x^2=\frac{16}{49}$;  3) $x^2=1\frac{7}{9}$;
4) $x^2=2\frac{1}{4}$;  5) $x^2=5$;  6) $x^2=13$.

**409.** Решить уравнение:

1) $x^2-49=0$;  2) $x^2-121=0$;  3) $\frac{1}{3}x^2=0$;
4) $\frac{x^2}{5}=0$;  5) $x^2+9=0$;  6) $x^2+12=0$.

**410.** Решить квадратное уравнение, разложив его левую часть на множители:

1) $x^2-x=0$;  2) $x^2+2x=0$;  3) $3x^2+5x=0$;
4) $5x^2-3x=0$;  5) $x^2-4x+4=0$;  6) $x^2+6x+9=0$.

**411.** Вычислить приближённо с помощью микрокалькулятора корни уравнения:

1) $x^2=7{,}12$;  2) $x^2=31$;  3) $x^2=0{,}4624$;
4) $x^2=675$;  5) $x^2-9735=0$;  6) $x^2-0{,}021=0$.

**412.** Решить уравнение:

1) $(x-2)(x^2+2x+4)-x^2(x-18)=0$;
2) $(x+1)(x^2-x+1)-x^2(x+4)=0$.

**413.** Показать, что уравнения $x^2=4$ и $|x|=2$ имеют одни и те же корни.

**414.** Найти такое положительное число $b$, чтобы левая часть уравнения оказалась квадратом суммы или разности, и решить полученное уравнение:

1) $x^2+bx+4=0$;  2) $x^2-bx+9=0$;
3) $x^2-8x+b=0$;  4) $x^2+\frac{2}{3}x+b=0$.

**415.** Решить уравнение:

1) $x^2+4x+3=0$;  2) $x^2+3x+2=0$.

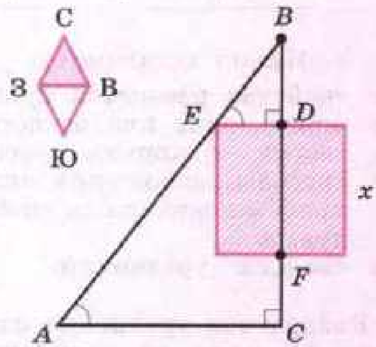
**416.** Доказать, что если число $x_0$ — корень уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $c\neq 0$, то число $\frac{1}{x_0}$ — корень уравнения $cx^2+bx+a=0$.

Диалог об истории

## Квадратные уравнения в древности

Профессор, в каких странах, кроме Вавилона, в древние времена учёные умели решать квадратные уравнения?

Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, пытались решать во многих странах. Вот задача из *китайского* трактата «Математика в девяти книгах», написанного во II в. до н. э.: «Имеется город с границей в виде квадрата со стороной неизвестного размера. В центре каждой стороны находятся ворота. На расстоянии 20 бу (1 бу = 1,6 м) от северных ворот (вне города) стоит столб. Если пройти от южных ворот 14 бу на юг, затем повернуть на запад и пройти ещё 1775 бу, то можно увидеть столб. Какова сторона границы города?»




В трактате приводится план местности, похожий на тот, который изображён на рисунке. На нём город показан квадратом, столб отмечен точкой $B$, северные ворота — точкой $D$, а южные — точкой $F$. После построений по условию задачи рассматриваются прямоугольные треугольники $BED$ и $BAC$. Из курса геометрии вы скоро узнаете, что такие треугольники называются *подобными* и для них сохраняется отношение длин сторон, лежащих против равных углов: $\frac{BD}{BC} = \frac{ED}{AC}$, или $\frac{BD}{BD + DF + FC} = \frac{ED}{AC}$. Если обозначить сторону границы города через $x$, то это соотношение запишется так: $\frac{20}{20 + x + 14} = \frac{0{,}5x}{1775}$, откуда получаем $x^2 + 34x - 71\,000 = 0$.

Корень этого уравнения $x = 250$ (бу). Отрицательные корни квадратного уравнения китайские математики не рассматривали.

А я увлекаюсь историей Древней Греции. Интересно, в какие века там начали решать квадратные уравнения?

Древние греки более двух тысяч лет назад, исследуя истоки гармонии в зрительных образах, поняли, что если отношение длин двух отрезков совпадает с так называемым *золотым сечением* (близким к числу 1,6), то одновременное восприятие этих отрезков производит на человека особое эстетическое воздействие. Нахождение числового значения этого отношения не обошлось без решения квадратного уравнения, об этом я расскажу позже.

## § 26 Неполные квадратные уравнения

В этом параграфе вы познакомитесь с частными случаями квадратного уравнения — неполными квадратными уравнениями. Решение таких уравнений сводится к решению знакомых вам линейных уравнений после применения метода разложения многочлена на множители.

**Нужно вспомнить:**

- свойство равенства нулю произведения;
- определение квадратного уравнения;
- теорему о корнях уравнения вида $x^2=d$, где $d>0$;
- способы разложения многочлена на множители вынесением общего множителя за скобки; с помощью формулы разности квадратов;
- свойства уравнений.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называют **неполным**, если хотя бы один из коэффициентов $b$ или $c$ равен нулю. Таким образом, неполное квадратное уравнение есть уравнение одного из следующих видов:

$$ax^2=0, \qquad ax^2+c=0,\ c\neq 0, \qquad ax^2+bx=0,\ b\neq 0.$$

Заметим, что в этих уравнениях коэффициент $a$ не равен нулю.

Покажем, как решаются неполные квадратные уравнения.

**Задача 1.** Решить уравнение $5x^2=0$.

▶ Разделив обе части этого уравнения на 5, получим: $x^2=0$, откуда $x=0$. ◁

**Задача 2.** Решить уравнение $3x^2-27=0$.

▶ Разделим обе части уравнения на 3, получим $x^2-9=0$. Это уравнение можно записать так: $x^2=9$, откуда $x_{1,2}=\pm 3$.

Ответ. $x_1=3$, $x_2=-3$. ◁

**Задача 3.** Решить уравнение $2x^2+7=0$.

▶ Уравнение можно записать так: $x^2=-3{,}5$. Это уравнение действительных корней не имеет, так как $x^2\geqslant 0$ для любого действительного числа $x$. ◁

**Задача 4.** Решить уравнение $-2x^2+5x=0$.

▶ Разложив левую часть уравнения на множители, получим: $x(-2x+5)=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=2{,}5$.

Ответ. $x_1=0$, $x_2=2{,}5$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Какое квадратное уравнение называется неполным?
2. Привести пример квадратного уравнения, у которого равен нулю: 1) второй коэффициент; 2) свободный член.
3. Какие свойства уравнений применялись при решении уравнения в задаче 2?
4. Почему не имеет корней уравнение в задаче 3?
5. На чём основана идея решения уравнения в задаче 4?

## Вводные упражнения

1. Назвать коэффициенты и свободный член квадратного уравнения:

   1) $3x^2-5x+6=0$; 2) $3x^2-5x=0$; 3) $3x^2+6=0$.

2. Какое из чисел $\frac{2}{3}$, $-1$, $-\sqrt{2}$, 0 является корнем уравнения:

   1) $x^2-1=0$; 2) $x^2=2$; 3) $x^2-\frac{4}{9}=0$; 4) $x^2-x=0$?

3. Решить уравнение:

   1) $x^2=49$; 2) $x^2=-100$; 3) $x^2=0$; 4) $x^2=17$; 5) $x(x-2)=0$.

## Упражнения

Решить уравнение (417—421).

**417.** 1) $x^2=0$; 2) $3x^2=0$; 3) $5x^2=125$; 4) $9x^2=81$;
5) $4x^2-64=0$; 6) $x^2-27=0$; 7) $4x^2=81$; 8) $0{,}01x^2=4$.

**418.** 1) $x^2-7x=0$; 2) $x^2+5x=0$; 3) $5x^2=3x$;
4) $4x^2=0{,}16x$; 5) $9x^2-x=0$; 6) $9x^2+1=0$.

**419.** 1) $4x^2-169=0$; 2) $25-16x^2=0$; 3) $2x^2-16=0$;
4) $3x^2=15$; 5) $2x^2=\frac{1}{8}$; 6) $3x^2=5\frac{1}{3}$.

**420.** 1) $\frac{x^2-1}{3}=5$; 2) $\frac{9-x^2}{5}=1$; 3) $4=\frac{x^2-5}{5}$; 4) $3=\frac{9x^2-4}{4}$.

**421.** 1) $3x^2+6x=8x^2-15x$; 2) $17x^2-5x=14x^2+7x$;
3) $10x+7x^2=2x^2+8x$; 4) $15x+9x^2=7x^2+10x$.

**422.** При каких значениях $x$ значения данных дробей равны:
1) $\frac{4x^2-3x}{3}$ и $\frac{x^2+5x}{2}$; 2) $\frac{3x^2+7x}{4}$ и $\frac{7x^2-5x}{3}$?

**423.** Решить уравнение:
1) $x(x-15)=3(108-5x)$;
2) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$;
3) $(2x+1)(x-3)-(1-x)(x-5)=29-11x$;
4) $(3x-8)^2-(4x-6)^2+(5x-2)(5x+2)=96$.

**424.** Найти число, квадрат которого равен удвоенному этому числу. Сколько решений имеет задача?

**425.** Найти число, квадрат которого, уменьшенный на 4, равен нулю. Сколько решений имеет задача?

**426.** Площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi R^2$ (где $S$ — площадь, $R$ — радиус круга). На микрокалькуляторе вычислить с точностью до 0,1 м диаметр цирковой арены, если её площадь составляет 2000 м$^2$.

**427.** Решить уравнение:
1) $\frac{x^2-9}{x-3}=0$; 2) $\frac{2x+x^2}{x+2}=0$.

Разговор о важном

**Хитрости Диофанта**

Скажите, какое из квадратных уравнений легче решить:
$$y^2-20y+96=0 \text{ или } x^2-4=0?$$

Конечно, второе. Очевидно, что его корнями будут числа 2 и −2. А первое уравнение устно я решить не могу. Но почему Вы задали этот вопрос?

При создании математических моделей реальных явлений все люди стараются создавать наиболее простые и удобные для рассмотрения модели (уравнения, неравенства и др.).

Разве первое и второе уравнения описывают одно и то же явление?

Пока я этого не говорил, но специально обозначил в этих уравнениях неизвестные разными буквами. Хочу, чтобы вы узнали, как от выбора неизвестного (но не от его обозначения) зависит вид созданной модели. Расскажу вам о том, как Диофант умело выбирал неизвестные. Вот одна из решённых им задач: найти два числа, если их сумма равна 20, а произведение равно 96.

Совсем простая задача. Может быть, я не решу составленное уравнение, но запишу его быстро. Смотрите: если $y$ — первое число, то $20-y$ — второе число. Вот уравнение: $y(20-y)=96$. После преобразований оно примет вид

$$y^2-20y+96=0.$$

Как раз первое из данных Вами уравнений.

Теперь послушайте, как рассуждал Диофант при решении этой задачи. Очевидно, искомые числа не равны между собой (в противном случае если их сумма 20, то произведение должно было быть равным 100). Значит, одно из чисел на $x$ больше половины их суммы, а другое — на $x$ меньше половины. То есть одно число равно $10+x$, а другое равно $10-x$. Тогда $(10+x)(10-x)=96$, откуда $100-x^2=96$, или $x^2=4$. После этого Диофант легко находил $x=2$ (отрицательных чисел греки тогда не знали), затем определял искомые числа: 12 и 8. Кстати, можешь проверить — эти числа являются также корнями уравнения, которое ты составила.

Да, оба уравнения приводят к решению задачи. Теперь я буду пытаться создавать разные модели решения задачи и выбирать из них наиболее красивую или простую.

# § 27 Метод выделения полного квадрата

Метод решения квадратных уравнений, с которыми вы познакомитесь в этом параграфе, имеет большое значение для изучения многих тем курса. С его помощью будут выведены формулы корней квадратного уравнения. В ряде случаев метод выделения полного квадрата облегчит исследование квадратичной функции и поможет при решении квадратных неравенств.

**Нужно вспомнить:**

- разложение многочленов на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности двух чисел;
- решение уравнений вида $x^2=d$.

Для решения квадратных уравнений применяется **метод выделения полного квадрата**. Поясним этот метод на примерах.

**Задача 1.** Решить квадратное уравнение $x^2+2x-3=0$.

► Преобразуем это уравнение так:

$$x^2+2x=3, \qquad x^2+2x+1=3+1, \qquad (x+1)^2=4.$$

Следовательно, $x+1=2$ или $x+1=-2$, откуда $x_1=1$, $x_2=-3$. ◁

Решая уравнение $x^2+2x-3=0$, мы преобразовали его так, что в левой части получился квадрат двучлена $(x+1)^2$, а правая часть не содержит неизвестное.

**Задача 2.** Решить уравнение $x^2+6x-7=0$.

► Преобразуем это уравнение так, чтобы в левой части получился квадрат двучлена:

$$x^2+6x=7, \quad x^2+2\cdot 3x=7,$$
$$x^2+2\cdot 3x+3^2=7+3^2, \quad (x+3)^2=16.$$

Поясним эти преобразования. В выражении $x^2+6x$ первое слагаемое — квадрат числа $x$, а второе — удвоенное произведение $x$ и 3. Поэтому для получения в левой части уравнения квадрата двучлена нужно прибавить к обеим частям уравнения $3^2$.

Решая уравнение $(x+3)^2=16$, получаем $x+3=4$ или $x+3=-4$, откуда $x_1=1$, $x_2=-7$. ◁

**Задача 3.** Решить уравнение $4x^2-8x+3=0$.

►
$$4x^2-8x=-3, \quad (2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x=-3,$$
$$(2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x+4=-3+4, \quad (2x-2)^2=1,$$
$$2x-2=1 \text{ или } 2x-2=-1, \quad x_1=\frac{3}{2}, \quad x_2=\frac{1}{2}. \text{ ◁}$$

**Задача 4.** Решить уравнение $x^2+5x-14=0$.

►
$$x^2+5x=14, \quad x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}=14+\frac{25}{4},$$
$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{81}{4}, \quad x+\frac{5}{2}=\pm\frac{9}{2},$$
$$x_1=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=2, \quad x_2=-\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=-7.$$

Ответ. $x_1=2$, $x_2=-7$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Обосновать этапы преобразования уравнения $x^2+2x-3=0$ к виду $(x+1)^2=4$ в задаче 1.
2. Пояснить цель второго этапа преобразования уравнения в задаче 2.
3. Пояснить цель третьего этапа преобразования уравнения в задаче 3.

## Вводные упражнения

1. Представить в виде многочлена:
   1) $(x+3)^2$; 2) $(2-x)^2$; 3) $(3x-1)^2$; 4) $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2$.
2. Найти неизвестный множитель $x$, если:
   1) $14=2x$; 2) $7=2x$; 3) $\frac{1}{2}=2x$; 4) $1=2x$.
3. Представить в виде квадрата двучлена:
   1) $x^2+4x+4$; 2) $x^2-6x+9$; 3) $4x^2-12x+9$; 4) $\frac{1}{4}+x+x^2$.

## Упражнения

**428.** Найти такое положительное число $m$, чтобы данное выражение было квадратом суммы или разности:
1) $x^2+4x+m$; 2) $x^2-6x+m$; 3) $x^2-14x+m$;
4) $x^2+16x+m$; 5) $x^2+mx+4$; 6) $x^2-mx+9$.

**429.** Методом выделения полного квадрата решить уравнение:
1) $x^2-4x-5=0$; 2) $x^2+4x-12=0$; 3) $x^2+2x-15=0$;
4) $x^2-10x+16=0$; 5) $x^2-6x+3=0$; 6) $x^2+8x-7=0$.

Решить уравнение (430—432).

**430.** 1) $9x^2+6x-8=0$; 2) $25x^2-10x-3=0$.

**431.** 1) $x^2-5x+4=0$; 2) $x^2-3x-10=0$.

**432.** 1) $2x^2+3x-5=0$; 2) $5x^2-7x-6=0$.

Диалог об истории

## Метод выделения полного квадрата у ал-Хорезми

Вы помните, что слово *алгебра* произошло от «ал-джебр», входящего в заголовок знаменитой книги ал-Хорезми? В этой книге рассмотрены приёмы решения уравнений: *ал-джебр* (*восстановление* — перенос слагаемых) и *вал-мукабала* (*приведение* — отбрасывание слагаемых). С помощью этих приёмов ал-Хорезми решал линейные и квадратные уравнения.

Значит, мы учим сегодня то, что учёные знали ещё в Средние века?

Ничего удивительного. Каждый человек в своём развитии и образовании проходит весь путь развития человечества. Итак, ал-Хорезми в начале IX в. в своём алгебраическом трактате дал подробное описание решений шести видов уравнений:

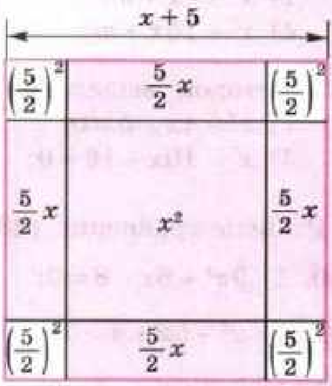
1) $ax^2 = bx$; 2) $ax^2 = c$; 3) $ax = c$;
4) $ax^2 + bx = c$; 5) $ax^2 + c = bx$; 6) $bx + c = ax^2$.

Ал-Хорезми не употреблял отрицательных чисел, поэтому рассматривал в уравнениях только действия сложения. Любое линейное или квадратное уравнение он приводил к одному из шести видов, а затем решал своими методами.

Например, уравнение $x^2 + 12x - 40 = 2x - 1$ ал-Хорезми решил бы следующим образом:

1) применил бы «ал-джебр» (перенёс «вычитание» из одной части уравнения в другую) и получил бы $x^2 + 12x + 1 = 2x + 40$;
2) применил бы «вал-мукабала» (отбрасывая из каждой части уравнения 1 и $2x$) и получил $x^2 + 10x = 39$.

При решении уравнения $x^2 + 10x = 39$ в своём трактате «Китаб ал-джебр вал-мукабала» ал-Хорезми приводит фактически геометрическую иллюстрацию вывода формулы корней квадратного уравнения *методом выделения полного квадрата*.




Ал-Хорезми рассуждал так: площадь большого квадрата равна $(x + 5)^2$. Эта площадь складывается из площади закрашенной фигуры, равной $x^2 + 10x$ (что соответствует левой части уравнения) и площади четырёх квадратов со сторонами $\frac{5}{2}$, равной 25. Значит, $(x + 5)^2 = 39 + 25$, откуда $x + 5 = 8$ (значение $x + 5 = -8$ не рассматривалось) и, значит, $x = 3$.

# § 28 Решение квадратных уравнений

Ранее были рассмотрены примеры решений квадратных уравнений методом выделения полного квадрата. С помощью этого метода будет выведена формула корней квадратного уравнения общего вида и показано её применение.

**Нужно вспомнить:**

- формулы квадрата суммы и квадрата разности;
- решение уравнений вида $x^2 = d$;
- свойства уравнений;
- понятие квадратного корня из числа;
- тождество $\sqrt{x^2} = |x|$.

Рассмотрим квадратное уравнение общего вида: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Разделив обе части уравнения на $a$, получим:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Преобразуем это уравнение так, чтобы в левой части получился квадрат двучлена:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad (1)$$

Если $b^2 - 4ac \geqslant 0$, то $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$, откуда

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

или

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Формулу (2) называют **формулой корней квадратного уравнения** общего вида.

**Задача 1.** Решить уравнение $6x^2+x-2=0$.

▶ Здесь $a=6$, $b=1$, $c=-2$. По формуле (2) находим:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot6(-2)}}{2\cdot6}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{-1\pm7}{12},$$

откуда $x_1=\frac{-1+7}{12}=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{-1-7}{12}=-\frac{2}{3}$. Ответ. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{2}{3}$. ◁

**Задача 2.** Решить уравнение $4x^2-4x+1=0$.

▶ Здесь $a=4$, $b=-4$, $c=1$. По формуле (2) находим:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\frac{4\pm0}{8}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $x=\frac{1}{2}$. ◁

Если в равенстве (1) правая часть отрицательна, т. е. $b^2-4ac<0$, то равенство (1) не может быть верным ни при каком действительном $x$, так как его левая часть неотрицательна.

**Уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней, если $b^2-4ac<0$.** Выражение $b^2-4ac$ называют **дискриминантом** и обозначают буквой $D$, т. е. $D=b^2-4ac$.

**Задача 3.** Доказать, что уравнение $x^2-4x+5=0$ не имеет действительных корней.

▶ Здесь $a=1$, $b=-4$, $c=5$, $D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0$.

Значит, данное уравнение не имеет действительных корней. ◁

**Задача 4.** Решить уравнение $2x^2+3x+4=0$.

▶ По формуле (2) имеем: $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot2\cdot4}}{4}$. Число, стоящее под знаком корня, отрицательно:

$$D=9-4\cdot2\cdot4=9-32<0.$$

Ответ. Уравнение не имеет действительных корней. ◁

Неполные квадратные уравнения также можно решать по формуле (2), однако при их решении удобнее пользоваться приёмами, рассмотренными в § 26.

**Задача 5.** Доказать, что корни квадратного уравнения

$$ax^2+2mx+c=0,$$

где $a\neq0$, $m^2-ac\geqslant0$, можно находить по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}. \tag{3}$$

▶ Здесь $b=2m$. По общей формуле корней квадратного уравнения (2) получаем:

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm\sqrt{4m^2-4ac}}{2a}=\frac{-2m\pm2\sqrt{m^2-ac}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}. \quad \triangleleft$$

**Задача 6.** Решить уравнение $3x^2-4x+1=0$.

▶ Здесь $b=-4=2\cdot(-2)$, т. е. $m=-2$. По формуле (3) находим:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{2\pm1}{3}, \text{ откуда } x_1=1, \ x_2=\frac{1}{3}. \quad \triangleleft$$

## Устные вопросы и задания

1. Обосновать верность равенства $\frac{b}{a}=2\cdot\frac{b}{2a}$.
2. С помощью свойств уравнений обосновать этапы преобразования уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ к виду (1).
3. Прочитать формулу $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
4. Как называется выражение $b^2-4ac$, где $a$ и $b$ — коэффициенты, $c$ — свободный член квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$? Как обозначают это выражение?
5. При каких условиях квадратное уравнение не имеет действительных корней; имеет один корень; имеет два корня?
6. Обосновать вывод формулы корней квадратного уравнения, у которого второй коэффициент представим в виде $2m$, где $m$ — целое число.

## Вводные упражнения

1. Решить уравнение:
   1) $x^2-81=0$; 2) $5x^2+15x=0$; 3) $(x-2)^2=0$; 4) $(x+1)^2-1=0$.
2. Назвать коэффициенты и свободный член квадратного уравнения:
   1) $2x^2-3x+1=0$; 2) $-x^2-2x+3=0$;
   3) $-5x^2-12x=0$; 4) $7x^2-13=0$.
3. Найти значение выражения $b^2-4ac$, если:
   1) $a=1$, $b=3$, $c=-5$; 2) $a=6$, $b=-2$, $c=1$;
   3) $a=-1$, $b=4$, $c=-2$; 4) $a=-2$, $b=-5$, $c=-1$.
4. Представить в виде квадрата одночлена стандартного вида выражение:
   1) $4a^2$; 2) $a^2b^4$; 3) $2a^6$; 4) $\frac{3}{25}b^8$.

## Упражнения

**433.** Найти значение выражения $\sqrt{b^2-4ac}$ при:

1) $a=3,\ b=1,\ c=-4$; 2) $a=3,\ b=-0{,}2,\ c=-0{,}01$;
3) $a=7,\ b=-6,\ c=-45$; 4) $a=-1,\ b=5,\ c=1800$.

**434.** Решить квадратное уравнение:

1) $2x^2+3x+1=0$; 2) $2x^2-3x+1=0$; 3) $2x^2+5x+2=0$;
4) $2x^2-7x+3=0$; 5) $3x^2+11x+6=0$; 6) $4x^2-11x+6=0$.

**435.** Найти все значения $x$, при которых значение выражения равно нулю:

1) $2x^2+5x-3$; 2) $2x^2-7x-4$; 3) $3x^2+x-4$;
4) $3x^2+2x-1$; 5) $x^2+4x-3$; 6) $3x^2+12x+10$;
7) $-2x^2+x+1$; 8) $-3x^2-x+4$.

Решить квадратное уравнение (436—437).

**436.** 1) $9x^2-6x+1=0$; 2) $16x^2-8x+1=0$;
3) $49x^2+28x+4=0$; 4) $36x^2+12x+1=0$.

**437.** 1) $2x^2+x+1=0$; 2) $3x^2-x+2=0$;
3) $5x^2+2x+3=0$; 4) $x^2-2x+10=0$.

**438.** Не решая уравнения, определить, сколько корней оно имеет:

1) $2x^2+5x-7=0$; 2) $3x^2-7x-8=0$;
3) $4x^2+4x+1=0$; 4) $9x^2-6x+2=0$.

Решить уравнение (439—441).

**439.** 1) $7x^2-6x+2=0$; 2) $3x^2-5x+4=0$; 3) $9x^2+12x+4=0$;
4) $4x^2-20x+25=0$; 5) $4x^2+12x+9=0$; 6) $x^2-3x-4=0$.

**440.** 1) $6x^2=5x+1$; 2) $5x^2+1=6x$;
3) $x(x-1)=72$; 4) $x(x+1)=56$;
5) $2x(x+2)=8x+3$; 6) $3x(x-2)-1=x-0{,}5(8+x^2)$.

**441.** 1) $\frac{x^2+3x}{2}=\frac{x+7}{4}$; 2) $\frac{x^2-3x}{7}+x=11$;
3) $\frac{2x^2+x}{3}-\frac{2-3x}{4}=\frac{x^2-6}{6}$; 4) $\frac{x^2+x}{4}-\frac{3-7x}{20}=0{,}3$.

**442.** Найти все значения $a$, при которых уравнение $ax^2+3x+2=0$, где $a\neq 0$:

1) имеет два различных корня; 2) не имеет корней;
3) имеет один корень.

**443.** Найти все значения $q$, при которых уравнение $x^2-2x+q=0$:
1) имеет два различных корня; 2) имеет один корень.

**444.** Решить уравнение, используя формулу (3):
1) $5x^2-8x-4=0$; 2) $4x^2+4x-3=0$; 3) $5x^2-26x+5=0$.

**445.** С помощью микрокалькулятора решить уравнение:
1) $2{,}5x^2-30{,}75x+93{,}8=0$; 2) $1{,}2x^2+5{,}76x+6{,}324=0$;
3) $17x^2-918x-125\,307=0$; 4) $13x^2-702x-82\,251=0$.

**446.** Записать формулу корней квадратного уравнения $x^2+2mx+c=0$, решить с помощью этой формулы уравнение:
1) $x^2-12x+20=0$; 2) $x^2+10x+24=0$;
3) $x^2+10x-24=0$; 4) $x^2-50x+49=0$.

**447.** С помощью микрокалькулятора найти приближённые значения корней уравнения с точностью до 0,01:
1) $1{,}3x^2+5{,}7x+5{,}1=0$; 2) $2{,}3x^2-30{,}1x+89=0$;
3) $x^2+19x-68=0$; 4) $x^2-23x-51=0$.

**448.** Доказать, что уравнение $x^2+px-1=0$ при любом $p$ имеет два различных корня.

**449.** Доказать, что уравнение $ax^2+bx-a=0$ при $a\neq 0$ и любом $b$ имеет два различных корня.

Диалог об истории

### О формулах корней не только квадратных уравнений

Профессор, кто первым нашёл формулы корней квадратных уравнений?

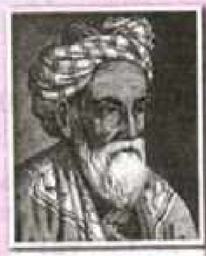
Один из первых трудов, в котором выводятся эти формулы, принадлежит индийскому математику *Брахмагупте (ок. 598—660)*. Он предложил формулу корней квадратного уравнения вида $ax^2+bx=c$, где $a>0$, практически совпадающую с той, которой мы пользуемся сегодня. В Европе формулы корней квадратных уравнений (аналогичные тем, которыми пользовался ал-Хорезми) впервые появились в «Книге абака» *Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (ок. 1170—1250)* в 1202 г. Современный вид формулы корней квадратного уравнения приобрели в XVII в. благодаря работам Р. Декарта и И. Ньютона.


Л. Фибоначчи

Помните, в 7 классе Вы нам рассказывали интересные и поучительные истории из жизни учёных? Расскажите, пожалуйста, о жизни какого-нибудь математика, занимавшегося изучением квадратных уравнений.

Расскажу вам о выдающемся математике, астрономе, философе и поэте *Омаре Хайяме (ок. 1048—1122)*, который внёс большой вклад в теорию решения уравнений.

Родился Омар Хайям на севере Ирана, а жил и работал во многих городах Средней Азии — Самарканде, Бухаре и др. В те времена на Востоке часто шли войны. Хайям испытывал нужду, зарабатывал на жизнь чем мог, и для спокойных занятий наукой у него оставалось очень мало времени. Был период, когда ему покровительствовали знатные вельможи. В те годы он писал замечательный трактат «О доказательствах задач алгебры и вал-мукабалы», проводил астрономические наблюдения, создавал солнечный календарь, развивал теорию *кубических уравнений*.



Омар Хайям

Кубические... Это уравнения с неизвестным в третьей степени?

Общий вид кубического уравнения такой: $ax^3+bx^2+cx+d=0$, где $a\neq 0$. Омар Хайям решал геометрическим методом частные случаи этого уравнения. Пытался найти формулу корней любого кубического уравнения алгебраически, но не смог. В XVI в. итальянские математики *Сципион дель Ферро (1465—1526)* и *Никколо Тарталья (1499—1557)* нашли формулы для решения кубических уравнений, а опубликовал их в 1545 г. *Джероламо Кардано (1501—1576)* (его имя и носят эти формулы).

Профессор, но Вы не рассказали, когда и какие стихи писал Омар Хайям, раз Вы назвали его и поэтом.

Да, Омар Хайям вошёл в историю и своими замечательными четверостишиями, воспевающими свободу, любовь и мудрость. Эти стихи (рубаи), наполненные глубоким философским смыслом, в XIX—XX вв. были переведены почти на все языки мира. Приведу только два из любимых мною четверостиший Омара Хайяма.

—

Чтоб мудро жизнь прожить, знать надобно немало.
Два важных правила запомни для начала.
Ты лучше голодай, чем что попало есть,
И лучше будь один, чем вместе с кем попало.

—

Не смотри, что иной выше всех по уму,
А смотри, верен слову ли он своему:
Если он своих слов не бросает на ветер —
Нет цены, как ты сам понимаешь, ему.

# § 29 Приведённое квадратное уравнение. Теорема Виета

В этом параграфе вы познакомитесь с замечательными теоремами, названными именем уже знакомого вам французского математика Ф. Виета. Эти теоремы в ряде случаев позволяют решать квадратные уравнения устно, находить второй корень квадратного уравнения, если один его корень известен. Познакомитесь с новым способом разложения многочлена вида $ax^2+bx+c$ на множители в случае, когда известны корни соответствующего ему квадратного уравнения.

**Нужно вспомнить:**

- понятие квадратного уравнения;
- формулы корней квадратного уравнения;
- правила сложения и умножения многочленов;
- разложение многочлена на множители способом группировки;
- основное свойство дроби и его применение при сокращении алгебраических дробей.

**!** Определение. Квадратное уравнение вида

$$x^2+px+q=0 \qquad (1)$$

называется **приведённым**.

В этом уравнении старший коэффициент равен единице. Например, уравнение $x^2-3x-4=0$ является приведённым квадратным уравнением.

Всякое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ может быть приведено к виду (1) делением обеих частей уравнения на $a \neq 0$.

Например, уравнение $4x^2+4x-3=0$ делением на 4 приводится к виду $x^2+x-\frac{3}{4}=0$.

Найдём корни приведённого квадратного уравнения (1). Для этого воспользуемся формулой корней квадратного уравнения общего вида $ax^2+bx+c=0$, т. е. формулой

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Приведённое уравнение $x^2+px+q=0$ есть частный случай уравнения общего вида, в котором $a=1$, $b=p$, $c=q$. Поэтому для приведённого квадратного уравнения формула (2) принимает вид:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

или

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \qquad (3)$$

Формулу (3) называют **формулой корней приведённого квадратного уравнения**. Формулой (3) особенно удобно пользоваться, когда $p$ — чётное число.

**Задача 1.** Решить уравнение $x^2-14x-15=0$.

▶ По формуле (3) находим: $x_{1,2}=7\pm\sqrt{49+15}=7\pm8$.

Ответ. $x_1=15$, $x_2=-1$. ◁

Для приведённого квадратного уравнения справедлива следующая теорема:

**ТЕОРЕМА ВИЕТА** **Если $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения**

$$x^2+px+q=0,$$

**то справедливы формулы**

$$x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q,$$

**т. е. сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.**

● По формуле (3) имеем:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Складывая эти равенства, получаем: $x_1+x_2=-p$.

Перемножая эти равенства, по формуле разности квадратов получаем:

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=q.\ ○$$

Например, уравнение $x^2-13x+30=0$ имеет корни $x_1=10$, $x_2=3$; сумма его корней $x_1+x_2=13$, а их произведение $x_1x_2=30$. Отметим, что теорема Виета справедлива и в случае, когда квадратное уравнение имеет два равных корня: $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$.

Например, уравнение $x^2-6x+9=0$ имеет равные корни: $x_1=x_2=3$; их сумма $x_1+x_2=6$, произведение $x_1x_2=9$.

**Задача 2.** Один из корней уравнения $x^2+px-12=0$ равен $x_1=4$. Найти коэффициент $p$ и второй корень $x_2$ этого уравнения.

► По теореме Виета $x_1 \cdot x_2=-12$, $x_1+x_2=-p$.

Так как $x_1=4$, то $4x_2=-12$, откуда $x_2=-3$,

$$p=-(x_1+x_2)=-(4-3)=-1.$$

Ответ. $x_2=-3$, $p=-1$. ◁

**Задача 3.** Составить приведённое квадратное уравнение, корни которого $x_1=3$, $x_2=4$.

► Так как $x_1=3$, $x_2=4$ — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то по теореме Виета

$$p=-(x_1+x_2)=-7, \ q=x_1x_2=12.$$

Ответ. $x^2-7x+12=0$. ◁

**Задача 4.** Один из корней уравнения $3x^2+8x-4=0$ положителен. Не решая уравнения, определить знак второго корня.

► Разделив обе части уравнения на 3, получим: $x^2+\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}=0$.

По теореме Виета $x_1x_2=-\frac{4}{3}<0$. По условию $x_1>0$, следовательно, $x_2<0$. ◁

При решении некоторых задач применяется следующая **теорема, обратная теореме Виета:**

**ТЕОРЕМА** Если числа $p$, $q$, $x_1$, $x_2$ таковы, что

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-p, \ x_1 \cdot x_2=q,} \quad (4)$$

то $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

● Подставим в левую часть $x^2+px+q$ вместо $p$ выражение $-(x_1+x_2)$, а вместо $q$ произведение $x_1 \cdot x_2$. Получим:

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=$$
$$=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2).$$

Таким образом, если числа $p$, $q$, $x_1$ и $x_2$ связаны соотношениями (4), то при всех $x$ выполняется равенство $x^2+px+q=(x-x_1)\times(x-x_2)$, из которого следует, что $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2+px+q=0$. ○

С помощью теоремы, обратной теореме Виета, иногда можно **подбором** найти корни квадратного уравнения.

**Задача 5.** Подбором найти корни уравнения $x^2-5x+6=0$.

▶ Здесь $p=-5$, $q=6$. Подберём два числа $x_1$ и $x_2$ так, чтобы $x_1+x_2=5$, $x_1x_2=6$.

Заметив, что $6=2\cdot3$, а $2+3=5$, по теореме, обратной теореме Виета, получаем, что $x_1=2$, $x_2=3$ — корни уравнения $x^2-5x+6=0$. ◁

**Задача 6.** Упростить дробь $\frac{x^2-x-12}{x+3}$.

▶ Разложим числитель дроби на множители:

$$x^2-x-12=x^2-4x+3x-12=x(x-4)+3(x-4)=(x-4)(x+3).$$

Следовательно, $\frac{x^2-x-12}{x+3}=\frac{(x-4)(x+3)}{x+3}=x-4$. ◁

Многочлен $ax^2+bx+c$, где $a\neq0$, называют **квадратным трёхчленом.**

При решении задачи 6 квадратный трёхчлен $x^2-x-12$ был разложен на множители способом группировки. Его можно было также разложить на множители, используя **теорему о разложении квадратного трёхчлена на множители:**

**ТЕОРЕМА** Если $x_1$ и $x_2$ — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то при всех $x$ справедливо равенство

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \qquad (5)$$

● Преобразуем выражение, стоящее в правой части равенства (5):

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-ax\cdot x_1-ax\cdot x_2+ax_1x_2= \\ =ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2. \qquad (6)$$

Так как $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, т. е. уравнения $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, то по теореме Виета

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

откуда $a(x_1+x_2)=-b$, $ax_1x_2=c$.

Подставляя эти выражения в равенство (6), получаем формулу (5). ○

**Задача 7.** Упростить выражение $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$.

▶ Разложим числитель и знаменатель дроби на множители.

1) Уравнение $2x^2+5x-3=0$ имеет корни $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-3$. По доказанной теореме $2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3)$.

2) Уравнение $x^2-x-12=0$ имеет корни $x_1=-3$, $x_2=4$. По доказанной теореме $x^2-x-12=(x+3)(x-4)$. Таким образом,

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}=\frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-4)}=\frac{2x-1}{x-4}. \triangleleft$$

## Устные вопросы и задания

1. Какое квадратное уравнение называют приведённым?
2. Преобразовать уравнение $3x^2-6x+7=0$ к виду приведённого квадратного уравнения.
3. Привести формулу корней квадратного уравнения вида $x^2+px+q=0$.
4. Сформулировать теорему Виета.
5. Сформулировать теорему Виета для случая $x_1=x_2$.
6. Сформулировать теорему, обратную теореме Виета.
7. Известно, что один из корней квадратного уравнения: 1) $x^2+$ $+px+10=0$; 2) $x^2+px-7=0$ — отрицателен. Определить знак второго корня.
8. Каким методом разложен на множители числитель дроби в задаче 6?
9. Разложить на множители квадратный трёхчлен $ky^2+ly+m$, если $y_1$ и $y_2$ — корни уравнения $ky^2+ly+m=0$.

## Вводные упражнения

1. Решить уравнение:

   1) $x^2-0{,}09=0$; 2) $x^2+\frac{1}{3}x=0$;

   3) $x^2+4x+4=0$; 4) $(x+2)^2-4=0$.

2. Выполнить деление обеих частей уравнения на первый коэффициент:

   1) $2x^2-3x+5=0$; 2) $\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{2}{3}=0$.

3. Найти сумму и произведение выражений:

   1) $x+\sqrt{x^2-y}$ и $x-\sqrt{x^2-y}$; 2) $-x+\sqrt{y+x^2}$ и $-x-\sqrt{y+x^2}$.

4. Сократить дробь: 1) $\frac{(2x+1)(x+3)}{(3+x)2x}$; 2) $\frac{(1-3x)(x+2)}{(x-3)(3x-1)}$.

5. Найти произведение корней уравнения $x^2-5x+6=0$ и сравнить его со свободным членом уравнения.

6. Найти сумму корней уравнения $x^2-5x+6=0$ и сравнить её со вторым коэффициентом уравнения.

## Упражнения

**450.** Решить приведённое квадратное уравнение:
1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2-6x-7=0$; 3) $x^2-8x-9=0$;
4) $x^2+6x-40=0$; 5) $x^2+x-6=0$; 6) $x^2-x-2=0$.

**451.** (Устно.) Найти сумму и произведение корней приведённого квадратного уравнения, имеющего корни:
1) $x^2-x-2=0$; 2) $x^2-5x-6=0$; 3) $x^2+3x+2=0$;
4) $x^2+3x-4=0$; 5) $x^2-7x+5=0$; 6) $x^2+9x-6=0$.

**452.** (Устно.) Один из корней уравнения $x^2-19x+18=0$ равен 1. Найти его второй корень.

**453.** (Устно.) Один из корней уравнения $28x^2+23x-5=0$ равен $-1$. Найти его второй корень.

**454.** (Устно.) Не решая уравнения, имеющего корни, определить знаки его корней:
1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2+5x+3=0$;
3) $x^2-5x+3=0$; 4) $x^2-8x-7=0$.

**455.** Записать приведённое квадратное уравнение, имеющее корни $x_1$ и $x_2$:
1) $x_1=3$, $x_2=-1$; 2) $x_1=2$, $x_2=3$;
3) $x_1=-4$, $x_2=-5$; 4) $x_1=-3$, $x_2=6$.

**456.** Подбором найти корни уравнения:
1) $x^2+5x+6=0$; 2) $x^2-7x+12=0$; 3) $x^2-6x+5=0$;
4) $x^2+8x+7=0$; 5) $x^2-8x+15=0$; 6) $x^2+2x-15=0$.

**457.** Квадратный трёхчлен разложить на множители:
1) $x^2-5x+6$; 2) $x^2+4x-5$; 3) $x^2+5x-24$;
4) $x^2+x-42$; 5) $2x^2-x-1$; 6) $8x^2+10x+3$;
7) $-6x^2+7x-2$; 8) $-4x^2-7x+2$.

**458.** Сократить дробь:

1) $\frac{x^2+x-2}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+4x-12}{x-2}$; 3) $\frac{x+3}{x^2-6x-27}$;

4) $\frac{x-8}{x^2-x-56}$; 5) $\frac{2x^2-3x-2}{4x^2-1}$; 6) $\frac{3x^2+8x-3}{9x^2-1}$.

**459.** Решить приведённое квадратное уравнение:

1) $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$; 2) $x^2-2\sqrt{5}x+1=0$;

3) $x^2+\sqrt{2}x-4=0$; 4) $x^2-4\sqrt{7}x+4=0$.

**460.** Разложить на множители:

1) $x^3-3x^2+2x$; 2) $x^3+4x^2-21x$;

3) $x^3+5x^2-24x$; 4) $x^3-9x^2-22x$.

**461.** Сократить дробь:

1) $\frac{x^2+6x-7}{x^2-7x+6}$; 2) $\frac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}$; 3) $\frac{x^2-8x+15}{-x^2+5x-6}$; 4) $\frac{36+5x-x^2}{x^2-x-20}$.

**462.** Упростить:

1) $\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x-3}$; 2) $\frac{3}{x^2+6x+9}-\frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{7}{5x^2+3x-2}-\frac{5}{5x-2}$; 4) $\frac{5x+1}{x^2+9x-10}:\frac{5x^2+x}{x^2-2x+1}$.

**463.** Пусть уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два действительных корня $x_1$ и $x_2$. Записать приведённое квадратное уравнение, имеющее корни $-x_1$ и $-x_2$.

**464.** Корни $x_1$ и $x_2$ квадратного уравнения $x^2+6x+q=0$ удовлетворяют условию $x_2=2x_1$. Найти $q$, $x_1$, $x_2$.

**465.** Корни $x_1$ и $x_2$ квадратного уравнения $x^2+px+3=0$ удовлетворяют условию $x_2=3x_1$. Найти $p$, $x_1$, $x_2$.

**466.** Не вычисляя корней $x_1$ и $x_2$ уравнения $3x^2-8x-15=0$, найти:

1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2+x_2^2$; 3) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 4) $x_1^3+x_2^3$.

**467.** С помощью микрокалькулятора найти корни уравнения; по теореме Виета выяснить, являются найденные значения точными или приближёнными значениями корней уравнения:

1) $x^2+2x-1=0$; 2) $x^2-2x-2=0$;

3) $x^2+1{,}8x-28{,}35=0$; 4) $x^2-39x-1026=0$.

Это интересно

## Поиск целых корней

Вы убедились в том, что если числа $x_1$ и $x_2$ — корни приведённого квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1 \cdot x_2 = q$. Поэтому если я попрошу вас найти целые корни уравнения $x^2+80x-81=0$, то вы будете их искать среди делителей свободного члена, т. е. среди чисел $\pm1$, $\pm3$, $\pm9$, $\pm27$, $\pm81$. Убедившись в том, что число 1 является корнем уравнения, вы легко найдёте второй корень, разделив свободный член на обнаруженный корень. Можно доказать, что *если уравнение любой степени с целочисленными коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.* Например, если вам скажут, что уравнение $2x^3-5x^2-4x+3=0$ имеет целые корни, то вы будете их искать среди делителей числа 3, т. е. среди чисел $\pm1$, $\pm3$.

Я проверил подстановкой числа 1 и $-1$. Обнаружил, что $-1$ является корнем данного уравнения. Теперь нужно проверять числа $\pm3$?

Можно проверять и их, может быть, есть ещё целые корни. А можно разделить многочлен, стоящий в левой части уравнения, на $x-x_1$, где $x_1$ — целочисленный корень уравнения. В нашем случае разделим многочлен на $x+1$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;2x^3-5x^2-4x+3 & x+1 \\
\underline{2x^3+2x^2\phantom{-4x+3}} & \overline{2x^2-7x+3} \\
-\;-7x^2-4x\phantom{+3} & \\
\underline{-7x^2-7x\phantom{+3}} & \\
-\;3x+3 & \\
\underline{3x+3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(2x^2-7x+3)$. Теперь нужно найти корни уравнения $2x^2-7x+3=0$.

Я уже вычислил корни этого квадратного уравнения по формуле корней — это числа 3 и $\frac{1}{2}$.

Скажи, а по аналогии с формулой (5) из текста параграфа не можешь ли ты разложить заданный мной четырёхчлен на множители?

Могу: $2x^3-5x^2-4x+3=2(x+1)(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Сделаю проверку: после выполнения действий умножения в правой части равенства я получил многочлен $2x^3-5x^2-4x+3$.

# § 30 Уравнения, сводящиеся к квадратным

Существует немало уравнений, которые после преобразований приводятся к виду квадратного уравнения. Некоторые уравнения удаётся привести к виду: «произведение равно нулю». Если среди множителей оказывается одночлен, двучлен или квадратный трёхчлен, то решение уравнения существенно упрощается. В этом параграфе будут рассмотрены примеры различных уравнений, сводящихся к квадратным.

**Нужно вспомнить:**

- свойство возведения степени в степень;
- нахождение общего знаменателя алгебраических дробей;
- разложение многочленов на множители;
- условие равенства нулю произведения, дроби;
- область допустимых значений выражения;
- понятие корня уравнения;
- свойства уравнений;
- понятие квадратного уравнения;
- формулы корней квадратных уравнений;
- разложение квадратного трёхчлена на множители.

**Задача 1.** Решить уравнение $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

► Обозначим $x^2 = t$, тогда уравнение примет вид: $t^2 - 7t + 12 = 0$. Решая это квадратное уравнение, получаем: $t_1 = 4$, $t_2 = 3$. Так как $t = x^2$, то решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений: $x^2 = 4$, $x^2 = 3$, откуда $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

Ответ. $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. ◁

**!** Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называют **биквадратным**.

Заменой $x^2 = t$ это уравнение сводится к квадратному.

**Задача 2.** Решить биквадратное уравнение $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$.

► Обозначим $x^2 = t$. Тогда данное уравнение примет вид:

$$9t^2 + 5t - 4 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим: $t_1 = \frac{4}{9}$, $t_2 = -1$. Уравнение $x^2 = \frac{4}{9}$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$, а уравнение $x^2 = -1$ не имеет действительных корней.

Ответ. $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$. ◁

**Задача 3.** Решить уравнение $\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x-3}=3$.

▶ Общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, равен $(x+2)(x-3)$. Если $x+2\neq 0$ и $x-3\neq 0$, то, умножая обе части уравнения на $(x+2)(x-3)$, получаем:

$$3(x-3)-4(x+2)=3(x+2)(x-3).$$

Преобразуем это уравнение:

$$3x-9-4x-8=3(x^2-x-6),$$

$$-x-17=3x^2-3x-18,\ 3x^2-2x-1=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим его корни: $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{3}$. Так как при $x=1$ и $x=-\frac{1}{3}$ знаменатели дробей исходного уравнения не обращаются в нуль, то числа 1 и $-\frac{1}{3}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{3}$. ◁

**Задача 4.** Решить уравнение $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{3}{x-1}=\frac{3-x}{x-2}$. (1)

▶ По условию $(x-1)(x-2)\neq 0$. Умножая обе части уравнения на $(x-1)(x-2)$, получаем: $1+3(x-2)=(3-x)(x-1)$. Преобразуем это уравнение:

$$1+3x-6=-x^2+4x-3,$$

$$x^2-x-2=0. \qquad (2)$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим его корни: $x_1=-1$, $x_2=2$.

При $x=-1$ знаменатели исходного уравнения не обращаются в нуль, следовательно, число $-1$ — корень исходного уравнения. При $x=2$ знаменатели двух дробей исходного уравнения равны нулю, поэтому число 2 не является корнем исходного уравнения.

Ответ. $x=-1$. ◁

В задаче 4 исходное уравнение (1) было сведено к квадратному уравнению (2), имеющему два корня. Один из них $x_1=-1$ является корнем уравнения (1). Другой корень $x_2=2$ не является корнем уравнения (1), в этом случае его называют **посторонним корнем.**

Таким образом, при умножении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут появиться посторонние корни. Поэтому **при решении уравнения, содержащего неизвестное в знаменателе дроби, необходима проверка.**

**Задача 5.** Решить уравнение $\frac{x+7}{x+4}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2+7x+12}=0.$

► Разложим квадратный трёхчлен $x^2+7x+12$ на множители. Решая уравнение $x^2+7x+12=0$, находим его корни $x_1=-3$, $x_2=-4$. Поэтому $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$. Умножим обе части данного уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на $(x+3)(x+4)$. Получим: $(x+7)(x+3)-(x+4)+1=0$. Преобразуем это уравнение:

$$x^2+10x+21-x-4+1=0,\ x^2+9x+18=0.$$

Решая это уравнение, находим его корни: $x_1=-3$, $x_2=-6$. Проверим эти корни. При $x=-3$ знаменатели второй и третьей дробей исходного уравнения обращаются в нуль, поэтому $x_1=-3$ — посторонний корень. При $x=-6$ знаменатели дробей исходного уравнения не равны нулю. Подстановкой $x=-6$ в исходное уравнение можно убедиться, что это число является корнем уравнения.

Ответ. $x=-6$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Какое уравнение называют биквадратным? Привести пример биквадратного уравнения.
2. Какую замену неизвестного нужно выполнить, чтобы уравнение $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ привести к виду квадратного?
3. Сколько действительных корней может иметь биквадратное уравнение?
4. Какое выражение является общим знаменателем дробей:

   1) $\frac{1}{x-5}$ и $\frac{2}{x+6}$;  2) $\frac{1}{x-4}$ и $\frac{1}{x^2-16}$?
5. Почему при решении уравнения, содержащего неизвестное в знаменателе дроби, необходима проверка?

## Вводные упражнения

1. Решить уравнение:

   1) $x^2=25$;  2) $x^2=5$;  3) $x^2=-5$;  4) $x^2=0$.
2. Представить в виде квадрата одночлена:

   1) $16x^4$;  2) $\frac{4}{81}y^4$;  3) $x^6y^8$;  4) $0{,}01x^{10}y^{12}$.

3. Найти допустимые значения букв, входящих в выражение:

1) $\frac{a}{x-5}-\frac{4}{x+3}$; 2) $\frac{5}{x(x+1)}+\frac{b}{x-2}$.

4. Подбором найти корни уравнения:

1) $x^2-5x+4=0$; 2) $x^2-x-2=0$;
3) $x^2+9x+18=0$; 4) $x^2-7x+12=0$.

5. Убедившись в том, что $x=-1$ является корнем уравнения, найти второй его корень: 1) $x^2+7x+6=0$; 2) $x^2-8x-9=0$.

6. Разложить на множители трёхчлен:

1) $x^2-6x-7$; 2) $2x^2-5x+3$.

## Упражнения

Решить уравнение (468—471).

**468.** 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $x^4-5x^2+4=0$;
3) $x^4-13x^2+36=0$; 4) $x^4-50x^2+49=0$.

**469.** 1) $x^4-3x^2-4=0$; 2) $x^4+3x^2-4=0$;
3) $x^4+x^2-20=0$; 4) $x^4-4x^2-5=0$.

**470.** 1) $\frac{10}{x-3}-\frac{8}{x}=1$; 2) $\frac{2}{x-5}+\frac{14}{x}=3$; 3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}$;
4) $\frac{40}{x-20}-\frac{40}{x}=1$; 5) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{5}{8}$; 6) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=1{,}5$.

**471.** 1) $\frac{3x+4}{x-6}=\frac{x-2}{4x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6}$;
3) $\frac{x+5}{x+2}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}$; 4) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{x-3}=1$;
5) $\frac{x^2}{x+3}-\frac{x}{-3-x}=\frac{6}{x+3}$; 6) $\frac{x^2}{x-1}-\frac{2x}{1-x}=\frac{3}{x-1}$.

**472.** Имеет ли действительные корни уравнение:
1) $x^4-5x^2+7=0$; 2) $x^4+3x^2+2=0$?

**473.** При каких значениях $x$ равны значения выражений:
1) $\frac{6}{x^2-1}+\frac{2}{1-x}$ и $2-\frac{x+4}{x+1}$; 2) $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-2}$ и $\frac{4}{4-x^2}+1$?

**474.** Решить уравнение:

1) $(x-1)^4-5(x-1)^2+4=0$;  2) $(x+5)^4+8(x+5)^2-9=0$.

**475.** С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $x^4+3x^2-7=0$;  2) $x^4+5x^2-5=0$;

3) $6x^4+19x^2-47=0$;  4) $5x^4+18x^2-111=0$.

Это интересно

### Замена неизвестных

Вы познакомились с применением замены $x^2=t$ для представления биквадратного уравнения в виде квадратного. В 7 классе методом замены неизвестных вы пользовались при решении систем уравнений, сводящихся к линейным. Например, систему

$$\begin{cases}\dfrac{10}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=3,\\[2mm] \dfrac{7}{x+y}-\dfrac{6}{x-y}=2\end{cases}$$

после замены $\dfrac{1}{x+y}=u$ и $\dfrac{1}{x-y}=v$ обращали в систему линейных уравнений: $\begin{cases}10u-4v=3,\\ 7u-6v=2.\end{cases}$

Думаю, что мы освоили этот полезный метод. А существуют ли какие-нибудь уравнения, отличные от биквадратных, но также сводящиеся к квадратным?

Конечно, существуют. Думаю, что после рассмотрения одного из них вы сможете сами конструировать интересные уравнения, приводящие к решению квадратных уравнений. Решим, например, такое уравнение:

$$(2x-1)(2x+3)(3x-2)(3x+4)=35.$$

► Умножим в его левой части первую скобку на последнюю, а вторую — на третью. Получим уравнение

$$(6x^2+5x-4)(6x^2+5x-6)=35.$$

Сделаем замену: $6x^2+5x-5=y$. Тогда уравнение примет вид

$$(y-1)(y+1)=35 \text{ или } y^2=36.$$

Корнями этого уравнения являются $y=-6$ и $y=6$. Возвращаясь к неизвестному $x$ и решая уравнения

$$6x^2+5x-5=-6 \text{ и } 6x^2+5x-5=6,$$

найдём: $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$, $x_3=1$, $x_4=-1\dfrac{5}{6}$. ◁

Шаг вперёд

## Уравнения с параметрами

Помню, мы в 7 классе решали линейные уравнения с параметрами. Покажите нам, как решаются квадратные уравнения с параметрами.

Только я бы не стал всякое уравнение с параметрами относить к тому или иному типу. Например, уравнение

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0 \qquad (1)$$

при любом значении $a$ является квадратным. Уравнение

$$ax^2 - (a+1)x + 1 = 0 \qquad (2)$$

при $a = 0$ является линейным, а при $a \neq 0$ — квадратным.

Попробуйте ответить на вопрос: «При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ имеет два различных корня?»

Раз это уравнение квадратное при любом $a$, то два корня оно имеет, когда дискриминант положителен, т. е. когда $(-3a)^2 - 4 \cdot 2a^2 = a^2 > 0$. Это возможно при $a \neq 0$.

Теперь попробую решить уравнение (2). Итак, при $a = 0$ уравнение $ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$ обращается в линейное $-x + 1 = 0$, корнем которого является число 1. При $a \neq 0$ имеем квадратное уравнение с дискриминантом

$$D = (-(a+1))^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2.$$

Найдём его корни:

$$x_{1,2} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a-1)^2}}{2a} = \frac{a + 1 \pm |a - 1|}{2a}.$$

Если $a > 1$, то (по определению модуля) $|a - 1| = a - 1$; если $a < 0$, то $|a - 1| = -(a - 1)$.

Поэтому корни уравнения при $a \neq 0$ можно найти по формулам

$$x_{1,2} = \frac{a + 1 \pm (a - 1)}{2a}.$$

Значит, $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{a}$?

Для $a \neq 0$ корни действительно такие. Полностью ответ к выполненному заданию можно записать так: «Если $a = 0$, то $x = 1$; если $a \neq 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{a}$».

Попробуйте теперь самостоятельно ответить на вопрос: «При каких значениях $a$ уравнение $(a+8)x^2 - 8x - a = 0$ имеет единственный корень?»

# § 31 Решение задач с помощью квадратных уравнений

Вы уже умеете решать задачи с помощью уравнений первой степени. В этом параграфе будут рассмотрены задачи, математической моделью которых является квадратное уравнение. Будет показана важность одного из этапов решения таких задач — этапа проверки найденных корней на соответствие условию задачи.

**Нужно вспомнить:**

- формулы корней квадратных уравнений;
- решение уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе дроби;
- понятие процента;
- формулы скоростей равномерного прямолинейного движения; движения по течению и против течения реки; формулу работы;
- формулы периметра и площади: треугольника; прямоугольника;
- основные этапы решения текстовой задачи.

Решим несколько задач с помощью квадратных уравнений.

**Задача 1.** В шахту брошен камень, и звук от его удара был услышан спустя 9 с. Определить глубину шахты, считая скорость звука равной 320 м/с, а ускорение свободного падения $g$ равным 10 м/с$^2$.

▶ Для нахождения глубины шахты достаточно определить время $t$ падения камня, так как глубина шахты согласно закону свободного падения равна $\frac{gt^2}{2}$ метрам.

По условию $g=10$ м/с$^2$, поэтому глубина шахты равна $5t^2$ метрам. С другой стороны, глубину шахты можно найти, умножив скорость звука 320 м/с на время его распространения от момента удара камня до момента, когда был услышан звук, т. е. на $(9-t)$ секунд. Следовательно, глубина шахты равна $320(9-t)$ метрам. Приравнивая два найденных выражения для глубины шахты, получаем уравнение $5t^2=320(9-t)$. Решим это уравнение:

$$t^2=64(9-t), \quad t^2+64t-64\cdot 9=0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$t_{1,2} = -32 \pm \sqrt{32^2 + 64 \cdot 9} = -32 \pm \sqrt{32(32+18)} =$$

$$= -32 \pm \sqrt{32 \cdot 50} = -32 \pm \sqrt{16 \cdot 100} = -32 \pm 40,$$

$$t_1 = 8, \; t_2 = -72.$$

Так как время падения камня положительно, то $t = 8$ с. Следовательно, глубина шахты равна

$$5t^2 = 5 \cdot 8^2 = 320 \text{ (м)}.$$

Ответ. 320 м. ◁

**Задача 2.** Автобус-экспресс отправился от автовокзала в аэропорт, находящийся на расстоянии 40 км. Через 10 мин вслед за автобусом выехал пассажир на такси. Скорость такси на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найти скорость такси и автобуса, если в аэропорт они прибыли одновременно.

▶ Пусть $x$ километров в час — скорость автобуса, тогда скорость такси равна $(x+20)$ километров в час.

Время движения автобуса равно $\frac{40}{x}$ часам, а время движения такси равно $\frac{40}{x+20}$ часам. По условию задачи разница между временем движения автобуса и такси равна 10 мин, т. е. $\frac{1}{6}$ ч. Следовательно,

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = \frac{1}{6}. \qquad (1)$$

Решим полученное уравнение. Умножая обе части уравнения на $6x(x+20)$, получаем:

$$40 \cdot 6 \cdot (x+20) - 40 \cdot 6x = x(x+20),$$
$$240x + 4800 - 240x = x^2 + 20x,$$
$$x^2 + 20x - 4800 = 0.$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 60$, $x_2 = -80$. При этих значениях $x$ знаменатели дробей, входящих в уравнение (1), не равны нулю, поэтому $x_1 = 60$ и $x_2 = -80$ являются корнями уравнения (1). Так как скорость автобуса положительна, то условию задачи удовлетворяет только один корень: $x = 60$. Поэтому скорость такси 80 км/ч.

Ответ. Скорость автобуса 60 км/ч, скорость такси 80 км/ч. ◁

**Задача 3.** На набор рукописи первый оператор, работая один, потратил бы на 3 ч меньше, чем второй. Работая одновременно, они закончили набор всей рукописи за 6 ч 40 мин. Сколько времени потребовалось бы каждому из них на набор всей рукописи?

► Примем работу по набору всей рукописи за единицу. Пусть первый оператор затратит на набор рукописи $x$ часов, тогда второму на эту работу потребуется $(x+3)$ часов. Первый оператор за час выполняет $\frac{1}{x}$ часть работы, а второй — $\frac{1}{x+3}$. Работая вместе, они выполняют за час $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}$ всей работы, а за 6 ч 40 мин, т. е. за $6\frac{2}{3}$ ч, они выполняют всю работу. Поэтому

$$6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=1.$$

Это уравнение можно записать так:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}. \qquad (2)$$

Умножая обе его части на $20x(x+3)$, получаем:

$$20(x+3)+20x=3x(x+3),$$
$$40x+60=3x^2+9x,$$
$$3x^2-31x-60=0.$$

Корни этого уравнения:

$$x_1=12,\quad x_2=-\frac{5}{3}.$$

При этих значениях $x$ знаменатели дробей, входящих в уравнение (2), не равны нулю, поэтому $x_1=12$ и $x_2=-\frac{5}{3}$ — корни уравнения (2). Так как по смыслу задачи $x>0$, то $x=12$. Следовательно, первый оператор затрачивает на работу 12 ч, второй 12 ч + 3 ч = 15 ч.

Ответ. 12 ч и 15 ч. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Назвать этапы решения задачи 1.
2. По какой формуле находится расстояние $s$, пройденное телом при свободном падении за время $t$, если его начальная скорость равна 0?

3. Как называется выражение $6x(x+20)$ для дробей, входящих в уравнение (1)?
4. Какое свойство уравнений используется для получения уравнения (2) из уравнения $6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=1$?
5. Почему в задаче 2 только один из корней уравнения (1) удовлетворяет условию задачи?

## Вводные упражнения

1. В прямоугольном равнобедренном треугольнике катет равен $x$ см, а гипотенуза на 8 см больше катета. Записать выражения для нахождения периметра и площади этого треугольника.
2. Тело движется равномерно и прямолинейно со скоростью 50 км/ч. Записать выражение для нахождения времени, за которое это тело преодолеет расстояние $s$.
3. Лодка движется: 1) по течению реки; 2) против течения реки с собственной скоростью 7 км/ч. Записать выражение для нахождения времени, за которое лодка преодолеет расстояние $s$, если скорость течения реки $x$ км/ч (известно, что $x<7$).
4. Рабочий может выполнить весь объём работы за $x$ ч, а его ученик — за $y$ ч. Записать выражение для нахождения времени, за которое весь объём работы выполнят рабочий и его ученик, если будут работать совместно.
5. Клиент положил на новый счёт в банке $x$ р. под 5% годовых. Какую максимальную сумму он сможет снять с этого счёта через год?
6. Найти подбором положительный корень уравнения:
   1) $x^2+6x-16=0$; 2) $x^2-7x-30=0$.
7. Решить уравнение: 1) $\frac{x-2}{x^2-4}=0$; 2) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$.

## Упражнения

**476.** Найти два последовательных натуральных числа, произведение которых равно: 1) 156; 2) 210.

**477.** Найти два последовательных нечётных натуральных числа, если их произведение равно: 1) 255; 2) 399.

**478.** Периметр прямоугольника равен 1 м, а площадь — 4 дм$^2$. Найти его стороны.

**479.** Сад площадью 2,45 га обнесён изгородью длиной 630 м. Найти длину и ширину сада, если он имеет прямоугольную форму.

**480.** Расстояние 400 км скорый поезд прошёл на час быстрее товарного. Какова скорость каждого поезда, если скорость товарного поезда на 20 км/ч меньше, чем скорого?

**481.** Прогулочный теплоход отправился вниз по течению реки от пристани $A$ и причалил к пристани $B$. После получасовой стоянки теплоход отправился обратно и через 8 ч после отплытия из $A$ вернулся на эту же пристань. Какова скорость теплохода в стоячей воде, если расстояние между пристанями $A$ и $B$ равно 36 км, а скорость течения реки 2 км/ч?

**482.** Две бригады, работая вместе, закончили заготовку леса за 6 дней. Сколько дней потребовалось бы каждой бригаде на выполнение этой работы, если одной из бригад для этого требуется на 5 дней меньше, чем другой?

**483.** От квадратного листа отрезали полоску шириной 6 см. Площадь оставшейся части равна 135 см$^2$. Определить первоначальные размеры листа.

**484.** Площадь прямоугольного треугольника равна 180 см$^2$. Найти катеты этого треугольника, если один больше другого на 31 см.

**485.** Расстояние 30 км один из двух лыжников прошёл на 20 мин быстрее другого. Скорость первого лыжника была на 3 км/ч больше скорости второго. Какова скорость каждого лыжника?

**486.** Две бригады строителей, работая вместе, построили кошару для овец за 12 дней. Сколько дней потребовалось бы на строительство такой же кошары каждой бригаде отдельно, если первой бригаде нужно было работать на 10 дней больше, чем второй?

**487.** Члены школьного кружка натуралистов отправились на катере для сбора лекарственных трав. Проплыв вниз по течению реки 35 км, они сделали трёхчасовую стоянку, после чего вернулись назад. Определить скорость катера в стоячей воде, если на всё путешествие ушло 7 ч, а скорость течения реки 3 км/ч.

$\boxed{\textbf{488.}}$ На середине пути между станциями $A$ и $B$ поезд был задержан на 10 мин. Чтобы прибыть в $B$ по расписанию, машинисту пришлось первоначальную скорость поезда увеличить на 12 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что расстояние между станциями равно 120 км.

**489.** За 4 дня совместной работы двух тракторов различной мощности было вспахано $\frac{2}{3}$ поля. За сколько дней можно было бы вспахать всё поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать всё поле на 5 дней быстрее, чем вторым?

**490.** Рабочий положил на хранение в сберегательный банк 50 000 р. По истечении года к его вкладу были причислены процентные деньги, и в то же время он увеличил свой вклад ещё на 50 000 р., а по истечении ещё одного года попросил выдать ему накопленные процентные деньги. Сколько процентов в год начисляет сбербанк, если рабочий получил 12 320 р. процентных денег, оставив вклад в 100 000 р. на новый срок?

**491.** Два раствора, из которых первый содержит 0,8 кг, а второй — 0,6 кг безводной серной кислоты, соединили вместе и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Найти массу первого и второго растворов в смеси, если известно, что безводной серной кислоты в первом растворе было на 10% больше, чем во втором.

*Диалог об истории*

## Золотое сечение

Я обещал рассказать вам о замечательном отношении величин, названном ещё в древности *золотым сечением*.

Вы говорили, что для нахождения этого отношения нужно уметь решать квадратные уравнения.

Вы научились их решать, поэтому мы вместе с древними греками пройдём путь от постановки задачи определения золотого сечения до нахождения его значения.

Греки поняли, что золотое сечение появляется тогда, когда длина всего отрезка $(a+b)$ относится к длине его большей части $a$ так же, как $a$ относится к $b$:


$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}. \qquad (1)$$

Найдём значение отношения длин отрезков $a$ и $b$, образующих золотое сечение. Из равенства (1) получаем $(a+b)b=a^2$, или $ab+b^2=a^2$. Разделив обе части последнего равенства на $b^2$, имеем

$$\frac{a}{b}+1=\left(\frac{a}{b}\right)^2. \qquad (2)$$

Если искомое отношение $\frac{a}{b}$ обозначить буквой $x$, то равенство (2) можно записать в виде:

$$x + 1 = x^2,$$

$$\text{откуда } x^2 - x - 1 = 0 \text{ и } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Так как $x$ не может быть отрицательным числом (как отношение длин отрезков), то $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$

Итак, $\frac{a}{b} \approx 1{,}6$. Но иногда полезно помнить, что $\frac{b}{a} \approx 0{,}6$.

Шаг вперёд

## Золотое сечение и числовой ряд Фибоначчи

Профессор, я в Интернете посмотрел фотографии красивых архитектурных сооружений, построенных с соблюдением пропорций золотого сечения. На одном сайте сказано, что существует несколько способов нахождения приближённого значения этого замечательного отношения. Вы их знаете?

Способов действительно немало, но на практике удобнее всего использовать числовой *ряд Фибоначчи* (названный по прозвищу выдающегося итальянского математика Средневековья Леонардо Пизанского): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... . В этой последовательности первое и второе числа равны 1, а каждое следующее число получено путём сложения двух предыдущих. Например, $13 = 8 + 5$, $55 = 34 + 21$.

Так вот, отношение двух последовательных чисел из ряда Фибоначчи даёт хорошее приближение к величине золотого сечения: $5 : 3 \approx 1{,}667$; $8 : 5 = 1{,}6$; $13 : 8 = 1{,}625$; $21 : 13 \approx 1{,}615$; $34 : 21 \approx 1{,}619$, и далее получаем всё более точные приближения числа $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

# § 32 Решение простейших систем, содержащих уравнение второй степени

Для решения систем уравнений, содержащих уравнение второй степени, применяются те же способы, что и для решения систем линейных уравнений — способы подстановки и алгебраического сложения. Для облегчения записи решения таких систем иногда применяют замену неизвестных. В этом параграфе рассмотрены системы уравнений, для решения которых требуется знание не только формул корней квадратного уравнения, но и знание теоремы, обратной теореме Виета.

**Нужно вспомнить:**

- понятие решения системы уравнений с двумя неизвестными;
- свойства уравнений;
- решения систем линейных уравнений подстановкой и сложением;
- формулы корней квадратного уравнения;
- теоремы Виета;
- формулы сокращённого умножения.

**Задача 1.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а его площадь 30 см$^2$. Найти катеты.

► Пусть катеты равны $x$ и $y$ сантиметрам. Используя теорему Пифагора и формулу площади прямоугольного треугольника, условие задачи запишем так:

$$\begin{cases} x^2+y^2=169, \\ \frac{1}{2}xy=30. \end{cases} \qquad (1)$$

Прибавляя к первому уравнению системы второе, умноженное на 4, получаем:

$$x^2+y^2+2xy=289,$$

откуда $(x+y)^2=289$, или $x+y=\pm 17$. Так как $x$ и $y$ — положительные числа, то $x+y=17$. Из этого уравнения выразим $y$ через $x$ и подставим в одно из уравнений системы (1), например во второе: $y=17-x$, $\frac{1}{2}x(17-x)=30$. Решим полученное уравнение: $17x-x^2=60$, $x^2-17x+60=0$, $x_1=5$, $x_2=12$. Подставляя эти значения в формулу $y=17-x$, находим

$y_1 = 12$, $y_2 = 5$. В обоих случаях один из катетов равен 5 см, другой 12 см.

Ответ. 5 см, 12 см. ◁

**Задача 2.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$

► По теореме, обратной теореме Виета, числа $x$ и $y$ являются корнями квадратного уравнения $z^2 - 3z - 10 = 0$. Решая это уравнение, получаем $z_1 = 5$, $z_2 = -2$. Следовательно, решениями системы являются следующие две пары чисел: $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

Ответ. $(5; -2)$, $(-2; 5)$. ◁

**Задача 3.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0. \end{cases}$

► Решим эту систему способом подстановки: $y = 3x - 6$,

$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Упростив это уравнение, получим $5x^2 - 48x + 43 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 8{,}6$. Подставляя значения $x$ в формулу $y = 3x - 6$, находим $y_1 = -3$, $y_2 = 19{,}8$.

Ответ. $(1; -3)$, $(8{,}6; 19{,}8)$. ◁

**Задача 4.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$

► Запишем первое уравнение системы так: $(x - y)(x + y) = 16$. Подставляя сюда значение $x - y = 2$ из второго уравнения системы, получаем $x + y = 8$. Итак,

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему способом сложения, находим $x = 5$, $y = 3$.

Ответ. $(5; 3)$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. На основании каких свойств уравнений и способов решения систем уравнений можно решить систему:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11, \\ x + y = -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 88? \end{cases}$

2. Указать два способа решения системы уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = -12. \end{cases}$

## Вводные упражнения

**1.** Какая из пар чисел (1; 4), (–2; 3), (–1; –3) обращает в верное числовое равенство уравнение:

1) $5x+2y=-4$; 2) $15x-4y=-3$; 3) $7x-\frac{1}{2}y=5$?

**2.** Решить систему уравнений способом подстановки:

1) $\begin{cases} x=2y, \\ 3x-2y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ (x+y)(x-y)=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x+y)(x-y)=55, \\ x+y=11. \end{cases}$

**3.** Решить систему уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} x-y=14, \\ x+y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=7, \\ 3x+y=12. \end{cases}$

**4.** Записать приведённое квадратное уравнение, сумма корней которого равна 4, а произведение –21.

## Упражнения

**492.** Решить систему уравнений первой степени с двумя неизвестными:

1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2y+x=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y=9, \\ 3y-2x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ 4y+8y-4=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y+4=0. \end{cases}$

Решить систему уравнений **(493—497)**.

**493.** 1) $\begin{cases} y=x+6, \\ x^2-4y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2-y, \\ y^2+x=32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y^2=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-3x=2, \\ x^2-2y=3. \end{cases}$

**494.** 1) $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3. \end{cases}$

**495.** 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=7, \\ x+y=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=12, \\ xy=11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=10. \end{cases}$

**496.** 1) $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2-y^2=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-y^2=15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ x+y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x-y=2. \end{cases}$

**497.** 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 10, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$

**498.** Сумма двух чисел равна 18, а их произведение 65. Найти эти числа.

**499.** Среднее арифметическое двух чисел равно 20, а их среднее геометрическое 12. Найти эти числа.

**500.** Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x = 2y - 3, \\ y^2 - 2x = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = 7. \end{cases}$

Решить систему уравнений (501—503).

**501.** 1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 46, \\ xy = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x - y)^2 = 4, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 4 + xy = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1. \end{cases}$

**502.** 1) $\begin{cases} x + xy + y = -1, \\ x - xy + y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - xy - y = -7, \\ x + xy - y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 11, \\ xy = 5. \end{cases}$

**503.** 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ x - y = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$

**504.** Участок прямоугольной формы нужно огородить забором длиной 1 км. Каковы должны быть длина и ширина участка, если его площадь равна 6 га?

**505.** При делении двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 6, а в остатке 4. При делении этого же числа на произведение его цифр в частном получается 2, а в остатке 16. Найти это число.

**506.** Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152, \\ x^2 - xy + y^2 = 19. \end{cases}$

**507.** Расстояние от $A$ до $B$ по течению реки катер проходит в 1,5 раза медленнее, чем теплоход, причём за каждый час катер отстаёт от теплохода на 8 км. Против течения реки путь от $B$ до $A$ теплоход проходит в 2 раза быстрее катера. Найти скорости теплохода и катера в стоячей воде.

## § 33 Различные способы решения систем уравнений

В этом параграфе вы познакомитесь с новыми способами решения систем уравнений. Узнаете, что при определённых условиях уравнения можно не только складывать, но и делить. Убедитесь в том, что замена неизвестных в ряде случаев существенно упрощает решения уравнений и систем уравнений.

**Нужно вспомнить:**

- формулы корней квадратного уравнения;
- способы решения систем уравнений;
- теоремы Виета;
- формулы сокращённого умножения.

Различные подходы к решению систем уравнений рассмотрим на конкретных примерах.

**Задача 1.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$

► Складывая почленно уравнения системы, получаем $2x + 2y = 8$, откуда $y = 4 - x$. Подставляя это выражение $y$ в любое из уравнений системы, например, во второе, получаем

$$x + 4 - x - 2x(4 - x) = -2,$$
$$4 - 8x + 2x^2 = -2, \ \ 2x^2 - 8x + 6 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0, \ \ x_1 = 1, \ \ x_2 = 3.$$

По формуле $y = 4 - x$ находим $y_1 = 3$, $y_2 = 1$.

Ответ. (1; 3), (3; 1). ◁

**Задача 2.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y^2 = 3, \\ xy^2 = 28. \end{cases}$

► Выразим $y^2$ из первого уравнения системы: $y^2 = x - 3$. Подставим это выражение во второе уравнение системы:

$$x(x - 3) = 28, \ \ x^2 - 3x - 28 = 0,$$

откуда $x_1 = 7$, $x_2 = -4$.

Пользуясь формулой $y^2 = x - 3$, находим значения $y$:

1) если $x = 7$, то $y^2 = 7 - 3$, $y^2 = 4$, откуда $y = 2$ или $y = -2$;

2) если $x = -4$, то $y^2 = -4 - 3 = -7 < 0$, значит, действительных корней нет.

Ответ. (7; 2), (7; –2). ◁

Заметим, что замена $x$ через $y$ из первого уравнения и подстановка найденного выражения во второе уравнение привели бы к решению биквадратного уравнения.

**Задача 3.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}. \end{cases}$

► Если $(x;\ y)$ — решение этой системы, то $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Запишем второе уравнение системы так: $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{8}$.

Подставляя значение $x + y = 12$ в полученное уравнение, находим $\frac{12}{xy} = \frac{3}{8}$, откуда $xy = 32$.

Решение данной системы свелось к решению системы

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, получаем, что $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 4$.

Ответ. (4; 8), (8; 4). ◁

**Задача 4.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$

► Преобразуем второе уравнение системы: $xy(x - y) = 2$. Очевидно, что $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $x - y \neq 0$, тогда разделим первое уравнение системы на второе и выполним преобразования:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2y - xy^2} = \frac{7}{2}, \quad \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x-y)} = \frac{7}{2},$$

$$2(x^2 + xy + y^2) = 7xy, \quad 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0.$$

Рассматривая полученное уравнение как квадратное относительно $x$, находим его корни:

$$x_{1,2} = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 16y^2}}{4}, \quad x_{1,2} = \frac{5y \pm 3y}{4},$$

откуда $x_1 = 2y$ или $x_2 = \frac{y}{2}$.

Подставив найденные выражения $x$ через $y$ во второе уравнение системы, получим:

1) если $x = 2y$, то $4y^3 - 2y^3 = 2$, откуда $y^3 = 1$, $y = 1$ и $x = 2$;

2) если $x = \frac{y}{2}$, то $\frac{y^3}{4} - \frac{y^3}{2} = 2$, откуда $y^3 = -8$, $y = -2$ и $x = -1$.

Ответ. (2; 1), (–1; –2). ◁

**Задача 5.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2xy + 4y^2 = 7, \\ x^3 + 8y^3 = 35. \end{cases}$

▶ Применяя формулу суммы кубов, записываем второе уравнение системы в виде

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 35.$$

Разделив это уравнение на первое уравнение системы, найдём $x + 2y = 5$.

Выразим из этого уравнения $2y$ через $x$ $(2y = 5 - x)$ и подставим найденное выражение во второе уравнение системы:

$$x^3 + (5 - x)^3 = 35, \ x^3 + 125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35,$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0, \ x^2 - 5x + 6 = 0, \ x_1 = 3, \ x_2 = 2.$$

Найдём соответствующие значения $y$:

1) $2y = 5 - 3$, откуда $y_1 = 1$, 2) $2y = 5 - 2$, откуда $y_2 = \frac{3}{2}$.

Ответ. $(3; 1)$, $\left(2; \frac{3}{2}\right)$. ◁

**Задача 6.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6}. \end{cases}$

▶ Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$, тогда $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{t}$, $t > 0$. Второе уравнение системы запишется так: $t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}$.

Умножив обе части уравнения на $t$, получим $t^2 - \frac{5}{6}t - 1 = 0$, откуда $t_{1,2} = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} + 1} = \frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}$, $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = -\frac{2}{3}$.

Так как $t > 0$, то $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2}$, или $\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$, откуда $x = \frac{9}{4}y$. Подставляя это выражение $x$ в первое уравнение системы, получаем $\frac{9}{4}y - y = 5$, $\frac{5}{4}y = 5$, $y = 4$, поэтому $x = 9$.

Ответ. $(9; 4)$. ◁

**Задача 7.** Решить систему уравнений $\begin{cases} xy = 2, \\ xz = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

▶ Найдём сначала значения $x$ и $y$, пользуясь первым и третьим уравнениями данной системы. Сложив третье уравнение с удвоенным первым, получим $(x + y)^2 = 9$, откуда $x + y = 3$ или $x + y = -3$.

Подставляя значения $x = 3 - y$ и $x = -3 - y$ в первое уравнение системы, получаем:

1) $(3 - y)y = 2$, $y^2 - 3y + 2 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$;

2) $(-3 - y)y = 2$, $y^2 + 3y + 2 = 0$, $y_3 = -2$, $y_4 = -1$.

Соответствующие значения $x$ таковы:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2.$$

Из второго уравнения системы находим $z = \frac{3}{x}$, откуда

$$z_1 = \frac{3}{2},\ z_2 = 3,\ z_3 = -3,\ z_4 = -\frac{3}{2}.$$

Ответ. $\left(2;\ 1;\ \frac{3}{2}\right)$, $(1;\ 2;\ 3)$, $(-1;\ -2;\ -3)$, $\left(-2;\ -1;\ -\frac{3}{2}\right)$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Каким способом решается задача: 1; 2; 6?
2. Как следует преобразовать уравнения системы в задаче 2, чтобы её можно было решить с помощью теоремы, обратной теореме Виета?
3. Какое условие должно выполняться, чтобы можно было выполнить деление одного уравнения на другое?

## Вводные упражнения

1. Выразить $y$ через $x$: 1) $3x + 5y = 4$; 2) $2xy = 1$.
2. Сложить почленно уравнения системы:

   1) $\begin{cases} x + 2y - 5xy = 4, \\ 2x + y + 5xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y + 3xy = -16, \\ 2x - y - 3xy = 4. \end{cases}$
3. Разделить уравнение $64x^3 + y^3 = 8$ на уравнение $4x + y = 2$.
4. Известно, что $\frac{x}{y} = t$. Выразить через $t$ отношение $\frac{y}{x}$.

## Упражнения

Решить систему уравнений (508—519).

**508.** 1) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 2, \\ xy + x + y = 29. \end{cases}$

**509.** 1) $\begin{cases} (x - 1)(y - 1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - 2)(y + 1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

**510.** 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x^2 - 9y^2 = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

**511.** 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

**512.** 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133, \\ x + y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + x = -9, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8y^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$

**513.** 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$

**514.** 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{3}{2}, \\ xy = 80; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -0{,}3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0{,}5. \end{cases}$

**515.** 1) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x^2 y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2 y - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

**516.** 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2 y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy^2 + xy^3 = 10, \\ x + xy = 10. \end{cases}$

**517.** 1) $\begin{cases} x^3 + 27y^3 = 54, \\ x^2 - 3xy + 9y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 72, \\ x - y = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 5xy + y^2 = 25, \\ 5x + y = 8. \end{cases}$

**518.** 1) $\begin{cases} x + y = 41, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{41}{20}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 13, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

**519.** 1) $\begin{cases} yz = 15, \\ xz = 10, \\ y^2 + z^2 = 34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xz + yz = 16, \\ xy + yz = 15, \\ xz + xy = 7. \end{cases}$

Шаг вперёд

## Однородное уравнение второй степени в системе уравнений

Хочу рассмотреть с вами решение системы уравнений $\begin{cases} 3x^2 - xy - 2y^2 = 0, \\ y^2 - x^2 = 5, \end{cases}$ для которой ни один из ранее рассмотренных способов решения применить не получится. Но сначала ответьте мне на вопрос: «Может ли, например, пара чисел $(x;\ y)$, где $y = 0$, быть решением данной системы?»

Конечно, нет. Если такое допустить, то второе уравнение системы не имеет решений, так как $x^2 \neq -5$.

Ты прав. Значит, если $y \neq 0$, то я могу разделить обе части первого уравнения на $y^2$. Получу следующее уравнение: $3\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 2 = 0$. Если теперь сделать замену $u = \frac{x}{y}$, то уравнение примет вид $3u^2 - u - 2 = 0$. Его корни $u_1 = 1$, $u_2 = -\frac{2}{3}$. То есть $\frac{x}{y} = 1$ или $\frac{x}{y} = -\frac{2}{3}$. Таким образом, нам осталось по очереди выражения $y = x$ и $y = -\frac{3}{2}x$ подставить во второе уравнение системы вместо $y$ и решить его относительно $x$.

Я решил второе уравнение системы. Подстановка $y = x$ не даёт корней (так как его левая часть обращается в 0, а правая равна 5), а подстановка $y = -\frac{3}{2}x$ даёт $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Соответствующие значения $y$ будут: $y_1 = -3$, $y_2 = 3$. То есть решениями системы будут пары чисел $(2;\ -3)$ и $(-2;\ 3)$?

Ты правильно завершил решение системы. Нам удалось её решить потому, что первое уравнение системы мы смогли представить в виде квадратного уравнения относительно $\frac{x}{y}$. Это оказалось возможным только потому, что все члены уравнения в левой его части оказались одночленами второй степени. В правой же части уравнения стоял нуль. Уравнения такого вида называют *однородными уравнениями второй степени*. Например, уравнение $7x^3 - x^2y + 3xy^2 - 6y^3 = 0$ — однородное уравнение третьей степени. Если разделить обе его части на $y^3 \neq 0$, то получится уравнение третьей степени относительно $\frac{x}{y}$: $7\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) - 6 = 0$.

Для самостоятельной работы я предложу вам системы, в которых присутствует однородное уравнение второй степени:

1) $\begin{cases} 2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 8, \\ 4x^2 - 7xy - 2y^2 = 0. \end{cases}$

## § 34 Решение задач с помощью систем уравнений

Математическими моделями для решения задач этого параграфа будут системы уравнений, в которых присутствует уравнение второй степени или уравнение, сводящееся к уравнению второй степени. С методами решения таких систем вы познакомились при изучении предыдущих параграфов.

**Нужно вспомнить:**

- формулы корней квадратных уравнений;
- этапы решения текстовой задачи;
- способы решения систем уравнений;
- формулы для нахождения: скорости равномерного прямолинейного движения; площадей и периметров многоугольников; стоимости покупки; производительности труда;
- представление натурального числа в виде суммы разрядных слагаемых.

**Задача 1.** Если к произведению двух чисел прибавить меньшее из них, то получится 54. Если к тому же произведению прибавить большее число, то получится 56. Найти эти числа.

▶ Обозначим искомые числа через $x$ и $y$ ($x<y$). По условию задачи получаем два уравнения, составляющие систему

$$\begin{cases} xy + x = 54, \\ xy + y = 56. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $y - x = 2$, откуда $y = x + 2$. Подставляя в первое уравнение системы вместо $y$ выражение $x + 2$, имеем:

$$x(x+2) + x = 54, \quad x^2 + 3x - 54 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -9.$$

Пользуясь формулой $y = x + 2$, получаем $y_1 = 8$, $y_2 = -7$.

Ответ. Искомые числа 6 и 8 или −9 и −7. ◁

**Задача 2.** Произведение цифр искомого двузначного натурального числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

▶ Обозначив через $x$ число десятков искомого числа, а через $y$ число его единиц, запишем искомое число в виде $10x + y$. Используя условия задачи, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3xy = 10x + y, \\ 10x + y + 18 = 10y + x. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему:

$$\begin{cases} 10x + y - 3xy = 0, \\ 9x - 9y + 18 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 10x + y - 3xy = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему способом подстановки:

$$x = y - 2,$$

$$10y - 20 + y - 3y^2 + 6y = 0, \quad 3y^2 - 17y + 20 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{6} = \frac{17 \pm 7}{6},$$

$$y_1 = 4, \quad y_2 = \frac{5}{3}.$$

Так как $x$ и $y$ — цифры искомого числа, то делаем вывод, что $y = 4$, откуда $x = 2$. Итак, искомое число — это число 24. Действительно, произведение его цифр $2 \cdot 4 = 8$ в три раза меньше самого числа. Прибавляя к 24 число 18, получаем число 42, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

Ответ. 24. ◁

**Задача 3.** Два шофёра, работая вместе, должны были перевезти груз за 6 ч. Так как второй опоздал к началу работы, то к его приезду первый перевёз уже $\frac{3}{5}$ всего груза. Остальную часть груза перевозил только второй шофёр, и потому перевозка груза заняла 12 ч. За какое время этот груз мог перевезти каждый шофёр, работая отдельно?

▶ Обозначим время, которое затратил бы на перевозку всего груза первый шофёр, через $x$ ч, а время, которое затратил бы второй шофёр, если бы они работали раздельно, через $y$ ч. Тогда за один час первый шофёр перевёз бы $\frac{1}{x}$ часть всего груза, а второй — $\frac{1}{y}$ часть всего груза.

Работая вместе, за один час они перевозили бы $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть груза и по условию задачи перевезли бы весь груз за 6 ч. Потому $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 6 = 1$.

Но в действительности первый шофёр, перевезя $\frac{3}{5}$ всего груза, затратил на это $\frac{3}{5}$ своего времени, а остальную часть груза перевёз второй шофёр, затратив на это $\frac{2}{5}$ своего времени.

Так как в этом случае на перевозку груза было затрачено всего 12 ч, то получаем второе уравнение:

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 12.$$

Решение этой задачи свелось к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 6 = 1, \\ \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 12. \end{cases}$$

Упростим эту систему: $\begin{cases} 6x + 6y = xy, \\ 3x + 2y = 60. \end{cases}$ Решим её способом подстановки. Имеем

$$3x = 60 - 2y, \quad 120 - 4y + 6y = \left(20 - \frac{2}{3}y\right)y, \quad 60 + y = 10y - \frac{1}{3}y^2,$$

откуда $y^2 - 27y + 180 = 0$,

$$y_{1,2} = \frac{27}{2} \pm \sqrt{\frac{729}{4} - 180} = \frac{27}{2} \pm \frac{3}{2}, \quad y_1 = 15, \quad y_2 = 12.$$

Пользуясь формулой $x = 20 - \frac{2}{3}y$, получаем $x_1 = 10$, $x_2 = 12$.

Ответ. 10 ч и 15 ч; 12 ч и 12 ч. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Каким способом решается система уравнений в задаче 1? Пояснить суть этого способа.
2. Каким способом решается система уравнений в задаче 2? Пояснить суть этого способа.
3. Что означает в задаче 3 выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

## Вводные упражнения

Записать в виде равенства взаимосвязь данных величин (1—4):

1. Произведение чисел $y$ и $x$ на 5 больше их суммы.
2. Двузначное число, содержащее $x$ десятков и $y$ единиц, на 36 больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

3. Первая труба может наполнить весь бассейн за $x$ ч, а вторая — за $y$ ч; работая вместе, эти трубы заполняют бассейн за 7 ч.

4. Из двух населённых пунктов, расстояние между которыми 20 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость первого $x$ км/ч, скорость второго $y$ км/ч, встреча произошла через 1,5 ч.

### Упражнения

**520.** Произведение двух чисел равно 135, а их разность 6. Найти эти числа.

**521.** Разность двух чисел равна 18. Сумма этих чисел, сложенная с частным от деления большего на меньшее, равна 34. Найти эти числа.

**522.** Периметр прямоугольника равен 14 см, а площадь — 12 см$^2$. Каковы стороны прямоугольника?

**523.** Площадь прямоугольного треугольника равна 90 см$^2$. Сумма площадей квадратов, построенных на его катетах, равна 369 см$^2$. Каковы катеты этого треугольника?

**524.** Два восьмых класса одной школы приобрели билеты в театр. Первый класс израсходовал на билеты 4900 р. Второй класс купил на 15 билетов меньше, но заплатил за каждый билет на 30 р. больше и истратил на билеты 3400 р. Сколько билетов и по какой цене куплено каждым классом?

**525.** Двое специалистов, работая вместе, закончили порученную им работу за 12 ч. Если бы сначала один из них выполнил половину всей работы, а другой — остальную часть, то на выполнение всей работы понадобилось бы 25 ч. За какое время каждый из них закончил бы эту работу, работая один?

**526.** Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна только через один второй кран. Затем, наоборот, второй кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна через один первый кран. После этого оказалось, что наполнены $\frac{13}{18}$ бассейна. Оба крана, работая вместе, наполняют бассейн за 3 ч 36 мин. Сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности?

**527.** Три коневодческие фермы сделали равные запасы овса, необходимого для подкормки лошадей. Первой ферме этого запаса овса хватает на 105 дней. Второй ферме, имеющей на 10 лошадей больше первой, запаса овса хватит на 100 дней, если дневную норму овса для каждой лошади уменьшить на 1 кг. На столько же дней хватит овса третьей ферме, где лошадей на 10 меньше, чем на первой, но дневная норма овса на 3 кг больше, чем на первой. Сколько лошадей на каждой ферме и какова суточная норма овса для каждой из них?

**528.** В зрительном зале клуба было 320 мест. После ремонта число мест в каждом ряду увеличили на 4 и, кроме того, в зале добавили ещё один ряд. Сколько стало рядов в этом зале, если после ремонта стало 420 мест?

Шаг вперёд

## Симметрические системы уравнений

Существуют уравнения с двумя неизвестными, обозначенными, например, $x$ и $y$, которые остаются неизменными после замены $x$ на $y$, а $y$ на $x$. Например, такими являются уравнения $x + y - 1 = 0$, $x^2 - 3xy + y^2 + 5 = 0$. Эти уравнения называют *симметрическими*, т. е. обладающими симметрией.

Но если в первом Вашем уравнении выполнить указанную замену, то оно примет вид $y + x - 1 = 0$, он отличен от вида исходного уравнения.

Согласись, с точностью до порядка слагаемых будет получено то же уравнение.

Согласен, но почему Вы решили рассказать нам о симметрических уравнениях?

Потому что хочу показать, как решаются системы уравнений, состоящих из двух симметрических уравнений. Они легко решаются, если сделать замену $x + y = u$ и $xy = v$. Рассмотрим систему симметрических уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 7 = 0, \\ x + y + xy - 11 = 0. \end{cases}$$

Запишем её в виде

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 3xy = 7, \\ x + y + xy = 11. \end{cases}$$

Пусть $x+y=u$, $xy=v$. Тогда относительно $u$ и $v$ система примет вид

$$\begin{cases} u^2-3v=7, \\ u+v=11. \end{cases}$$

Решив эту систему способом подстановки, найдём $u_1=5$, $u_2=-8$. Соответствующие значения $v$ найдём из формулы $v=11-u$. Итак: $v_1=6$, $v_2=19$. Осталось решить системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=-8, \\ xy=19. \end{cases}$$

Первая система имеет решения (2; 3) и (3; 2). А вторая не имеет решений. Профессор, я бы хотел решить какую-нибудь систему симметрических уравнений.

Попробуйте самостоятельно решить такие системы:

1) $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+1=0, \\ x+y+1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-4=0, \\ x^3+y^3-28=0. \end{cases}$

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

Решить уравнение (**529—531**).

**529.** 1) $x^2-12=0$; 2) $x^2-50=0$;

3) $\frac{1}{3}x^2+2x=0$; 4) $3x-\frac{2}{5}x^2=0$.

**530.** 1) $x^2+4x-45=0$; 2) $x^2-9x-52=0$;

3) $3x^2-7x-40=0$; 4) $5x^2+17x-126=0$.

**531.** 1) $4x^2-2x-3=0$; 2) $9x^2-3x-4=0$;

3) $4x^2-8x-1=0$; 4) $3x^2+4x-1=0$.

**532.** Не решая уравнения, определить, сколько действительных корней оно имеет:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $5x^2+7x-8=0$;

3) $25x^2-10x+1=0$; 4) $9x^2+30x+25=0$.

**533.** Разложить на множители квадратный трёхчлен:

1) $x^2+12x+30$; 2) $x^2-10x+16$;

3) $2x^2+x-1$; 4) $2x^2-3x-2$.

**534.** Сократить дробь:

1) $\frac{x^2-9}{x+3}$; 2) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x+2}$; 3) $\frac{16x^2-24x+9}{4x^2+5x-6}$; 4) $\frac{25x^2+10x+1}{5x^2-14x-3}$.

Решить уравнение (535—536).

**535.** 1) $x^4-9x^2+20=0$; 2) $x^4-11x^2+18=0$;
3) $2x^4-5x^2+2=0$; 4) $5x^4-16x^2+3=0$.

**536.** 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}=\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2+x}{x+3}=\frac{5-x}{x}$;
3) $\frac{y+3}{y^2-y}+\frac{6-y}{1-y^2}=\frac{y+5}{y+y^2}$; 4) $\frac{y+4}{y-4}-\frac{y}{4-y}=2-\frac{4}{y}$.

**537.** Найти два числа, сумма которых равна 3, а сумма их квадратов равна 5.

**538.** Найти два числа, разность которых равна 1, а сумма их квадратов равна $3\frac{2}{9}$.

**539.** Одна сторона прямоугольника на 5 м больше другой, а его площадь равна 84 м$^2$. Найти стороны прямоугольника.

**540.** Площадь прямоугольника равна 675 см$^2$. Найти стороны прямоугольника, если одна из них на 30 см меньше другой.

**541.** Скорость вертолёта Ми-6 относительно воздуха равна 300 км/ч. Расстояние в 224 км вертолёт пролетел дважды: один раз — по ветру, другой раз — против ветра. Определить скорость ветра, если на полёт против ветра вертолёт затратил на 6 мин больше, чем на полёт по ветру. (При вычислении использовать микрокалькулятор.)

**542.** Скорость велосипедиста на первой половине пути была на 3 км/ч больше, чем его скорость на второй половине пути. С какой скоростью велосипедист проехал вторую половину пути, если весь путь в 90 км он преодолел за 5,5 ч?

**543.** На посадке деревьев работали две бригады. Первая бригада ежедневно высаживала на 40 деревьев больше, чем вторая, и посадила 270 деревьев. Вторая бригада работала на 2 дня больше первой и посадила 250 деревьев. Сколько дней работала на посадке деревьев каждая бригада?

**544.** Разность двух натуральных чисел относится к их произведению как 1 : 24, а сумма этих чисел относится к их разности как 5 : 1. Найти эти числа.

**545.** Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+3y=10, \\ xy=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y=-7, \\ xy=-6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2-y^2=200, \\ x+y=20; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-y^2=9, \\ x-y=1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ y-x=1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

**Решить уравнение (546—548).**

**546.** 1) $3x(x-2)=x-4$; 2) $\frac{x^2-2}{6}-\frac{1-x}{2}=\frac{x-5}{6}$.

**547.** 1) $2x(x-2)=(x+1)^2-9$; 2) $5x(x-4)=(x-8)^2-65$;

3) $\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$; 4) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=4$.

**548.** 1) $(x-5)(x-6)=30$; 2) $(x+2)(x+3)=6$;

3) $(x-1)(x-4)=3x$; 4) $(x-2)(x+8)=6x$.

**549.** При каких значениях $x$ выражение $x^2+3x-88$ принимает значение, равное: 1) 0; 2) 20; 3) $-18$; 4) $-70$?

**550.** Сколько действительных корней имеет квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, если:

1) $a=3,\ b=1,\ c=-4$; 2) $a=5,\ b=2,\ c=3$;

3) $a=25,\ b=-10,\ c=1$; 4) $a=1,\ b=0,\ c=-25$?

**551.** При каких значениях $x$ значения данных выражений равны:

1) $\frac{9}{2x+2}+\frac{x}{x-1}$ и $\frac{1-3x}{2-2x}$; 2) $\frac{3}{x^2-1}-\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2x-2}$;

3) $\frac{2}{x^3-4}$ и $\frac{1}{x-2}-\frac{x-4}{x^2+2x}$; 4) $\frac{x-2}{x^2-x}$ и $\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+x}$?

**552.** Упростить выражение:

1) $(x-10)\cdot\left(\frac{x+3}{x^2-7x-30}+\frac{x+4}{x^2-6x-40}\right)$;

2) $\left(\frac{x-1}{2x^2+3x-5}-\frac{x+1}{3x^2+4x+1}\right)\cdot(6x^2+17x+5)$.

**553.** Решить уравнение:

1) $\frac{12x+4}{x^2+2x-3}=\frac{3x-2}{x-1}-\frac{2x+3}{x+3}$;

2) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$.

**554.** Мастерская в определённый срок должна выпустить 5400 пар обуви. Фактически она выпускала в день на 30 пар больше, чем предполагалось, и выполнила заказ на 9 дней раньше срока. За сколько дней был выполнен заказ?

**555.** Два туриста выехали одновременно на велосипедах из села $A$ и направились разными дорогами в село $B$. Первый должен был проехать 30 км, а второй — 20 км. Скорость движения первого туриста была на 3 км/ч больше скорости второго. Однако второй турист прибыл в $B$ на 20 мин раньше первого. Сколько времени был в дороге каждый турист?

**556.** Две бригады рабочих закончили ремонт участка дороги за 4 ч. Если бы сначала одна из них отремонтировала половину всего участка, а затем другая — оставшуюся часть, то весь ремонт был бы закончен за 9 ч. За сколько времени каждая бригада в отдельности могла бы отремонтировать весь участок?

**557.** Поезд должен пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан у семафора на 10 мин. Увеличив скорость после этого на 10 км/ч, он прибыл на место назначения с опозданием на 2 мин. Определить первоначальную скорость поезда.

**558.** Экскурсанты отправились из города $A$ в город $B$ на теплоходе, а возвратились обратно на поезде. Расстояние от $A$ до $B$ по водному пути равно 108 км, а по железной дороге 88 км. Поездка по железной дороге продолжалась на 4 ч меньше, чем на теплоходе. Сколько километров в час проходил поезд, если его скорость была на 26 км/ч больше скорости теплохода?

**559.** В зрительном зале клуба было 270 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 5 и добавили ещё один ряд, в зрительном зале стало 380 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале клуба?

**560.** На эстрадный концерт в клубе было продано на 20 000 р. билетов по одной стоимости и на 12 000 р. билетов стоимостью на 50 р. больше. Каковы цены билетов, если на концерте было 280 человек?

Решить систему уравнений (561—562).

**561.** 1) $\begin{cases} 2x^2 - y = 2, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{7}{y-1} = 1, \\ \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{2}{y}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+5} + \dfrac{2}{y-3} = 2, \\ \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{1}{y-6}. \end{cases}$

**562.** 1) $\begin{cases} y^2 - 3xy + x^2 - x + y + 9 = 0, \\ y - x = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 6, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 2, \\ xz = 3, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 30, \\ y - x = 3, \\ y - z = 4. \end{cases}$

**563.** На изготовление одной детали первый рабочий затрачивал на 2,5 мин больше, чем второй. После того как первый рабочий начал изготавливать за каждый час на 3 детали больше, а второй — на одну деталь больше, чем раньше, их производительность труда стала одинаковой. Сколько деталей изготавливал каждый рабочий за 1 ч первоначально?

**564.** Из пункта $A$ в пункт $B$ отправился автомобиль, а одновременно навстречу ему из пункта B отправился автобус. Автомобиль прибыл в $B$ через 40 мин после встречи с автобусом, а автобус прибыл в $A$ через 1,5 ч после их встречи. Найти скорости автомобиля и автобуса, если расстояние между пунктами $A$ и $B$ равно 100 км (скорости автомобиля и автобуса постоянны).

**565.** Записать приведённое квадратное уравнение, имеющее корни $x_1$ и $x_2$:

1) $x_1 = 3,\ x_2 = -1;$ 2) $x_1 = 2,\ x_2 = 3;$

3) $x_1 = 0,\ x_2 = 4;$ 4) $x_1 = -1,\ x_2 = 5.$

**566.** Пусть $x_1 = -3$ — корень уравнения $5x^2 + 12x + q = 0$. Найти $x_2$.

**567.** Не вычисляя корней $x_1$ и $x_2$ уравнения $x^2 - 7x - 21 = 0$, найти:

1) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2};$ 2) $x_1^2 + x_2^2;$ 3) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1};$ 4) $x_1^4 + x_2^4.$

**568.** В уравнении $(a-7)x^2 + 13x - a = 0$ один из корней равен 2. Найти значение $a$ и второй корень уравнения.

**569.** Корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ — взаимно обратные положительные числа. Найти $q$.

**570.** Сумма квадратов корней уравнения $x^2+px-3=0$ равна 10. Найти $p$.

**571.** Решить уравнение:

1) $\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$;

2) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{7+18x}{x^3-1}$.

**572.** На межшкольном шашечном турнире было сыграно 56 партий, причём каждый игрок играл с каждым две партии (белыми и чёрными). Сколько школьников участвовало в турнире?

**573.** В первенстве по шахматам была сыграна 231 партия. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый с каждым играл по одному разу?

**574.** В чемпионате по волейболу было сыграно 66 матчей. Сколько команд участвовало в чемпионате, если каждая команда играла с каждой по одному разу?

**575.** Несколько спортсменов, уезжая после соревнований домой, обменялись сувенирами (каждый подарил каждому по одному сувениру). Сколько было спортсменов, если сувениров понадобилось 30?

**576.** *Задача Маклорена*[1]. Несколько человек обедали вместе и по счёту должны были уплатить 175 шиллингов. Так как у двоих из них денег не оказалось, каждому из оставшихся пришлось уплатить на 10 шиллингов больше. Сколько человек обедало?

**577.** Составить программу для вычисления значения выражения $\sqrt{b^2-4ac}$ на микрокалькуляторе и найти его при:

1) $a=3$, $b=12$, $c=-4551$;

2) $a=2$, $b=114$, $c=1612$;

3) $a=1{,}5$, $b=-2{,}1$, $c=-55{,}08$;

4) $a=2{,}5$, $b=-30{,}75$, $c=93{,}8$.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Водонапорный бак заполняется двумя трубами за 2 ч 55 мин. Первая труба может его наполнить на 2 ч быстрее, чем вторая. За какое время каждая труба, работая отдельно, заполнит этот бак?

[1] К. Маклорен (1698—1746) — шотландский математик, ученик И. Ньютона.

2. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена товара снизилась с 3000 до 1920 р. На сколько процентов снижалась цена этого товара каждый раз?
3. Квадратный кусок резины растянули так, что он по длине увеличился на 4 см, а по ширине уменьшился на столько же. Получившийся кусок имеет площадь 560 см$^2$. Определить первоначальные размеры куска резины.
4. Груз, свободно падающий из вертолёта, находясь на высоте 16 м от земли, имел скорость $v_0=2$ м/с. Найти время $t$, за которое груз пролетит оставшиеся 16 м. (Расстояние $s$, которое пролетает свободно падающее тело, находится по формуле $s=v_0t+\frac{gt^2}{2}$, где $v_0$ — начальная скорость, $t$ — время падения, $g$ — ускорение свободного падения.)
5. Футболист подбросил мяч вертикально вверх со скоростью $v_0=12$ м/с. Через какое время $t$ мяч будет находиться на высоте 4 м? (Высота $H$, на которую поднимается вертикально брошенное тело, находится по формуле $H=v_0t-\frac{gt^2}{2}$, где $v_0$ — начальная скорость, $t$ — время полёта, $g$ — ускорение свободного падения.)
6. Сосуд наполнен жидкостью $A$. Из него отлили 6 л, добавили 6 л жидкости $B$, перемешали и отлили 15 л смеси. Затем долили ещё 15 л жидкости $B$ и получили смесь, содержащую 40% (по объёму) жидкости $A$. Каков объём сосуда?
7. Даны точки $A$, $B$ и $C$, расстояния между которыми указаны на рисунке 37. Найти: 1) отрезок $AD$ — проекцию $AC$ на $AB$; 2) расстояние $h$ от точки $C$ до прямой, проходящей через точки $A$ и $B$.

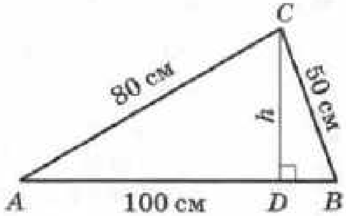


Рис. 37

## В этой главе вы узнали,

что такое:

— квадратное уравнение;
— неполное квадратное уравнение;
— метод выделения полного квадрата;
— приведённое квадратное уравнение;
— биквадратное уравнение;
— теорема Виета; теорема, обратная теореме Виета;
— метод введения нового неизвестного;

как:

— решать неполные квадратные уравнения;
— применять для решения уравнений общую формулу корней квадратного уравнения; формулу корней уравнения с чётным вторым коэффициентом; формулу корней приведённого квадратного уравнения;
— решать биквадратные уравнения;
— решать уравнения с неизвестным в знаменателе дроби;
— решать системы уравнений, содержащие уравнение второй степени, способом подстановки; сложения; деления; введения нового неизвестного;
— решать текстовые задачи с помощью составления квадратного уравнения; системы уравнений, содержащей уравнение второй степени.

## ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

**1.** Решить уравнение:

а) $3x^2=0$; б) $(x+1)(x-1)=0$;
в) $4x^2-1=0$; г) $3x^2=5x$;
д) $4x^2-4x+1=0$; е) $x^2-16x-17=0$;
ж) $0{,}3x^2+5x=2$; з) $x^2-4x+5=0$.

**2.** Разложить на множители:

а) $x^2+x-6$; б) $2x^2-x-3$.

**3.** Расстояние между сёлами 36 км один велосипедист преодолевает на 1 ч быстрее другого. Найти скорость каждого велосипедиста, если известно, что скорость одного на 3 км/ч больше скорости другого.

**4.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2-y^2=72, \\ x+y=9. \end{cases}$

II уровень

**5.** Решить уравнение $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{24-10x}{x^2-2x}$.

**6.** Упростить выражение

$$\left(\frac{3x-x^2}{x^2-6x+9}-\frac{10x-4x^2}{4x^2-25}\right)\cdot(2x^2-x-15).$$

**7.** Расстояние 48 км катер шёл на 1 ч дольше, чем теплоход. Найти скорости катера и теплохода, если одна больше другой на 4 км/ч.

III уровень

8. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ x - y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4. \end{cases}$

9. При каких значениях $a$ уравнение $ax^2 - 2ax - a + 2 = 0$ имеет один корень?

10. Корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ являются числа $x_1$ и $x_2$. Составить уравнение, корнями которого являются числа $x_1 + \frac{1}{x_2}$ и $x_2 + \frac{1}{x_1}$.

11. Решить уравнение $\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 4$.

12. При делении двузначного числа на произведение его цифр в частном получится 2, а в остатке — 5. При делении числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, на сумму его цифр в частном получается 7, а в остатке — 3. Найти это число.

13. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5. \end{cases}$

## ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Решение квадратных уравнений в Древнем Вавилоне.
2. Квадратные уравнения в трудах Диофанта.
3. Квадратные уравнения в индийских трактатах.
4. Квадратные уравнения в трудах ал-Хорезми.
5. Исторические задачи на составление и решение квадратных уравнений.
6. Теорема Виета для уравнений третьей и четвёртой степеней.
7. Квадратные уравнения в задачах физики и геометрии.
8. Различные методы решения систем уравнений.
9. Уравнения и системы уравнений в задачах экономики.

# ГЛАВА V
# Квадратичная функция

В 7 классе вы познакомились с одним из основных понятий математики — понятием функции. Узнали историю его возникновения, убедились в том, что задолго до его появления люди изучали взаимосвязанные величины: составляли таблицы квадратов чисел и квадратных корней из чисел, строили графики зависимостей физических, геометрических, астрономических и других величин.

Вы подробно изучали свойства и график линейной функции. Узнали историю создания метода координат, познакомились с кусочно-заданными функциями.

В этой главе вам предстоит изучить *квадратичную функцию*, которая задаётся формулой

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где $a \neq 0$. С простейшими квадратичными функциями вы уже встречались и знаете, например, что ещё математики Древнего Вавилона установили зависимость площади круга от его радиуса. Приближённо вычисляя площадь круга по формуле $S = 3R^2$, они тем самым находили значения квадратичной функции $S(R) = 3R^2$.

В предыдущей главе вы решали задачи, связанные с движением тела, брошенного вертикально вверх. Высота $H$ полёта тела зависит от времени полёта $t$ и находится по формуле

$$H = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где $v_0$ — начальная скорость движения, $g$ — ускорение свободного падения. Тогда $H = H(t)$ — квадратичная функция от независимой переменной $t$.

Графиком квадратичной функции является *парабола*. Модель параболы вы могли наблюдать в реальной действительности: по параболической траектории движется мяч, брошенный баскетболистом в корзину; невертикальные струи воды в фонтане «рисуют» в воздухе параболы и т. д. В этой главе вы научитесь строить параболу по определённым точкам и узнаете, как умение решать квадратное уравнение помогает при исследовании квадратичной функции.

# § 35 Определение квадратичной функции

В прошлом году вы познакомились с понятиями зависимой и независимой переменных. Научились на координатной плоскости строить график линейной функции $y = kx + b$. Узнали, что линейная функция является математической моделью многих реальных процессов. Познакомились с различными способами задания функции: формулой, таблицей, графиком, с помощью описания. В этом параграфе будут введены понятия квадратичной функции и нулей функции, а также показано прикладное значение квадратичной функции.

**Нужно вспомнить:**

- понятия функции (зависимой переменной) и аргумента (независимой переменной);
- способы задания функции;
- алгоритм нахождения значения функции, заданной формулой, по заданному значению аргумента;
- алгоритм нахождения значения аргумента по заданному значению функции, если функция задана формулой;
- формулы корней квадратного уравнения.

В различных областях науки и техники часто встречаются функции, которые называют **квадратичными**. Приведём примеры.

1) Площадь $y$ квадрата со стороной $x$ вычисляется по формуле $y = x^2$.

2) Если тело брошено вверх со скоростью $v$, то расстояние $s$ от него до поверхности земли в момент времени $t$ определяется формулой $s = -\frac{gt^2}{2} + vt + s_0$, где $s_0$ — расстояние от тела до поверхности земли в момент времени $t = 0$.

В этих примерах рассмотрены функции вида $y = ax^2 + bx + c$. В первом примере $a = 1$, $b = c = 0$, а переменными являются $x$ и $y$. Во втором примере $a = -\frac{g}{2}$, $b = v$, $c = s_0$, а переменные обозначены буквами $t$ и $s$.

**!** Определение. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a$, $b$ и $c$ — заданные действительные числа, $a \neq 0$, $x$ — действительная переменная, называется **квадратичной функцией.**

Например, квадратичными являются функции: $y = x^2$, $y = -2x^2$, $y = x^2 - x$, $y = x^2 - 5x + 6$, $y = -3x^2 + 0{,}5x$.

**Задача 1.** Найти значение функции $y(x) = x^2 - 5x + 6$ при $x = -2$, $x = 0$.

▶ $y(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20$; $y(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$. ◁

**Задача 2.** При каких значениях $x$ квадратичная функция $y = x^2 + 4x - 5$ принимает значение, равное: 1) 7; 2) –9; 3) 0?

▶ 1) По условию $x^2 + 4x - 5 = 7$. Решая это уравнение, получаем: $x^2 + 4x - 12 = 0$, $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -6$.

2) По условию $x^2 + 4x - 5 = -9$, откуда

$$x^2 + 4x + 4 = 0,\ (x + 2)^2 = 0,\ x = -2.$$

3) По условию $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$. ◁

В задании 3) были найдены значения $x$, при которых функция $y = x^2 + 4x - 5$ принимает значение, равное 0, т. е. $y(1) = 0$ и $y(-5) = 0$. Такие значения $x$ называют **нулями квадратичной функции.**

**Задача 3.** Найти нули функции $y = x^2 - 3x$.

▶ Решая уравнение $x^2 - 3x = 0$, находим $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. ◁

## Устные вопросы и задания

1. Сформулировать определение квадратичной функции.
2. Привести примеры квадратичных зависимостей.
3. Как найти значение функции $y = 2x^2 - x + 3$ при $x = 98$?
4. Как найти значения аргумента $x$ функции $y = 2x^2 - x + 3$, при которых $y = 6$?

5. Что называют нулём квадратичной функции?
6. Любая ли квадратичная функция имеет нули?

### Вводные упражнения

1. Функция задана таблицей:

| $x$ | $-10$ | $-8$ | $-4$ | $0$ | $2$ | $5$ | $7$ | $9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-7$ | $-3$ | $1$ | $-3$ | $1$ | $4$ | $-7$ | $10$ |

1) Найти значение $y$, если $x$ равен $-8$; $0$; $5$; $9$;
2) найти значения $x$, если $y$ равен $-7$; $-3$; $1$.

2. Функция задана формулой $y(x)=-3x+5$. Найти: 1) $y(0)$; $y(3)$; $y(-2)$; 2) значение $x$, если $y(x)=0$; $y(x)=-1$; $y(x)=2$.

3. При каких значениях $x$ квадратный трёхчлен $6x^2-x-1$ принимает значение, равное 0?

### Упражнения

**578.** (Устно.) Является ли квадратичной функция:
1) $y=2x^2+x+3$; 2) $y=3x^2-1$; 3) $y=5x+1$
4) $y=x^3+7x-1$; 5) $y=4x^2$; 6) $y=-3x^2+2x$?

**579.** При каких действительных значениях $x$ квадратичная функция $y=x^2-x-3$ принимает значение, равное:
1) $-1$; 2) $-3$; 3) $-\frac{13}{4}$; 4) $-5$?

**580.** При каких действительных значениях $x$ квадратичная функция $y=-4x^2+3x-1$ принимает значение, равное:
1) $-2$; 2) $-8$; 3) $-0,5$; 4) $-1$?

**581.** Определить, какие из чисел $-2$; $-\sqrt{3}$; $-1$; $-0,2$; $0$; $1$; $\sqrt{3}$ являются нулями квадратичной функции:
1) $y=x^2+2x$; 2) $y=x^2+x$; 3) $y=x^2-3$; 4) $y=5x^2-4x-1$.

**582.** Найти нули квадратичной функции:
1) $y=x^2-x$; 2) $y=x^2+3$; 3) $y=-6x^2+7x-2$;
4) $y=3x^2-5x+8$; 5) $y=2x^2-7x+9$; 6) $y=8x^2+8x+2$;
7) $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$; 8) $y=2x^2+x-1$; 9) $y=3x^2+5x-2$.

**583.** Найти коэффициенты $p$ и $q$ квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, если известны нули $x_1$ и $x_2$ этой функции:

1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;  2) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$;

3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$;  4) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

**584.** Найти значения $x$, при которых функции $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = 2x + 1$ принимают равные значения.

**585.** Найти координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = 4x^2 + 4x + 1$, $y = 2x + 1$;  2) $y = x^2 - 8x + 15$, $y = \frac{2}{3}x - 2$;

3) $y = x^2 - 3\sqrt{2}x + 4$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1$;  4) $y = \sqrt{3}x^2 + 3x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$.

*Диалог об истории*

**Квадратичная функция в опытах Галилея**

Профессор, почему Вы несколько раз приводили примеры зависимости от времени высоты подъёма брошенного вертикально вверх тела и пути, пройденного свободно падающим телом?

Потому что эти зависимости — одни из самых наглядных квадратичных зависимостей. Открыл эти зависимости в конце XVI в. *Галилео Галилей (1564—1642).*

Г. Галилей

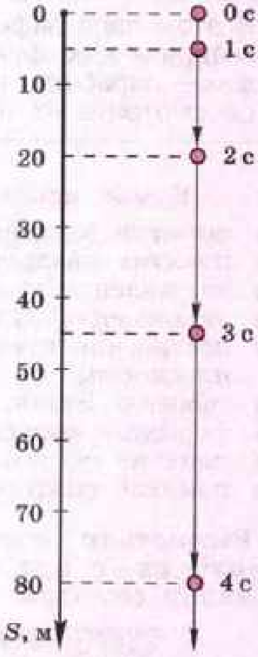
Галилей ставил опыты, которые описаны во многих школьных учебниках физики. Он многократно бросал с Пизанской башни разные предметы и доказал, что скорость движения не зависит от массы падающего тела. Экспериментально Галилей вывел и закон зависимости пути, пройденного свободно падающим телом, от времени падения.

Коротко опишу опыт, который проделывали и после Галилея другие исследователи. С большой высоты много раз бросали металлический шарик и через каждую секунду фиксировали его местоположение (см. рис.) — расстояние от точки $O$ (начала движения). Результат заносили в таблицу.

| $t$, с | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$, м | 0 | 5 | 20 | 45 | 80 | ... |

Очевидно, что функция $s(t)$ — не линейная. Было сделано предположение, что данная зависимость — квадратичная. С помощью информации из первых трёх столбцов таблицы были найдены коэффициенты $a$, $b$ и $c$ квадратичной функции $s = at^2 + bt + c$. При $t = 0$ и $s = 0$ получили $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$, откуда $c = 0$. Значения $t = 1$, $s = 5$ и $t = 2$, $s = 20$ позволили составить систему уравнений

$$\begin{cases} 5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1, \\ 20 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} 5 = a + b, \\ 20 = 4a + 2b. \end{cases}$$




Решением полученной системы линейных уравнений являются $a = 5$ и $b = 0$.

Затем проверялись другие пары чисел из таблицы подстановкой в равенство $s = 5 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 0$, т. е. в равенство $s = 5t^2$. Оказалось, что все получаемые равенства верные: $45 = 5 \cdot 3^2$, $80 = 5 \cdot 4^2$. Это означало, что закон падения шарика действительно задаётся формулой $s = 5t^2$.

Было понятно, что равенство это приближённое, так как и Галилей, и повторявшие эти опыты другие исследователи не могли точно замерять время и расстояние. В курсе физики сегодня обосновывается точное задание формулой рассматриваемой функции: $s = \frac{gt^2}{2}$, где $g$ — ускорение свободного падения, $g \approx 9{,}8$ м/с². В практических расчётах часто принимают $g = 10$ м/с², и тогда расстояние $s$, пройденное свободно падающим телом, находят по формуле $s = 5t^2$.

Таким образом, Галилей с помощью наблюдений и опытов сумел математическим языком описать закон движения свободно падающего тела! Почему именно в те годы учёные заинтересовались подобными зависимостями?

Вы уже знаете, что развитие математики всегда стимулировали задачи практики и смежных с ней разделов науки. До XVI в. астрономы и математики имели дело в основном с кажущимися им неподвижными объектами. Но после открытия *Николаем Коперником (1473—1543)* движения Земли и других планет вокруг Солнца математикам понадобились совершенно новые методы и модели, позволяющие описывать движущийся и меняющийся мир.

Одним из первых задачи новых видов движения стал формулировать Галилео Галилей. Многие из изучавшихся Галилеем процессов описывались, как мы сегодня уже знаем, с помощью квадратичной функции.

# § 36 Функция $y = x^2$

В этом параграфе вы познакомитесь с самой простой из всех квадратичных функций: $y = x^2$. Постройте по точкам её график — параболу, изучите основные свойства этой функции и рассмотрите их приложения в практике.

**Нужно вспомнить:**

- понятия зависимой и независимой переменных;
- понятие квадратичной функции;
- нахождение значений функции по значению аргумента;
- нахождение нулей квадратичной функции;
- построение точек с заданными координатами на координатной плоскости;
- теоремы Виета;
- формулы корней квадратного уравнения;
- понятие системы уравнений и способы решения систем;
- понятие симметрии относительно прямой.

Рассмотрим функцию $y = x^2$, т. е. квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ при $a = 1$, $b = c = 0$. Для построения графика этой функции составим таблицу некоторых её значений:

| $x$ | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

Построив точки с координатами, указанными в таблице, и соединив их плавной кривой, получим график функции $y = x^2$ (рис. 38). Кривая, являющаяся графиком функции $y = x^2$, называется **параболой**.

Рассмотрим **свойства функции** $y = x^2$.

1) Значение функции $y = x^2$ **положительно** при $x \neq 0$ и **равно нулю** при $x = 0$. Следовательно, парабола $y = x^2$ проходит через начало координат, а остальные точки параболы лежат выше оси абсцисс. Говорят, что **парабола** $y = x^2$ **касается оси абсцисс в точке** (0; 0).

2) График функции $y = x^2$ **симметричен относительно оси ординат**, так как $(-x)^2 = x^2$. Например, $y(-3) = y(3) = 9$. Таким образом, ось ординат является **осью симметрии параболы**. Точку пересечения параболы с её осью симметрии называют **вершиной параболы**. Для параболы $y = x^2$ вершиной является начало координат.

3) При $x \geqslant 0$ большему значению $x$ соответствует большее значение $y$. Например, $y(3) > y(2)$. Говорят, что функция $y = x^2$ **возрастает на промежутке $x \geqslant 0$.** В частности, это означает, что функция $y = x^2$ возрастает на любом промежутке, принадлежащем промежутку $x \geqslant 0$. Например, она возрастает на промежутках $[1;\ 2]$ и $(3;\ 7)$.

При $x \leqslant 0$ большему значению $x$ соответствует меньшее значение $y$. Например, $y(-2) < y(-4)$. Говорят, что функция $y = x^2$ **убывает на промежутке $x \leqslant 0$.** В частности, это означает, что функция $y = x^2$ убывает на любом промежутке, принадлежащем промежутку $x \leqslant 0$. Например, она убывает на промежутках $[-6;\ 0)$ и $(-5;\ -4]$.

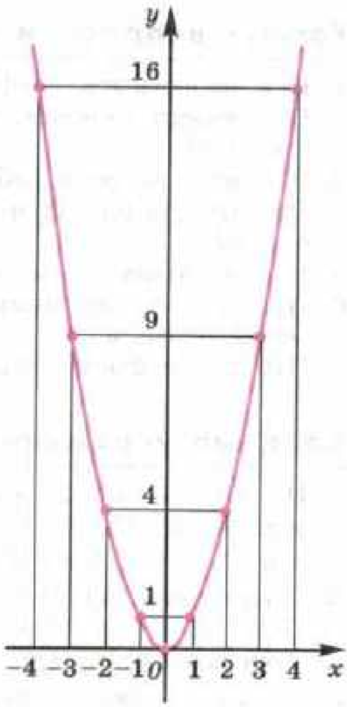


Рис. 38

Задача. Найти координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 6$.

► Координаты точки пересечения являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему способом подстановки, получаем $x^2 = x + 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Подставляя значения $x_1$ и $x_2$ в одно из уравнений системы, находим $y_1 = 9$, $y_2 = 4$.

Ответ. $(3;\ 9)$, $(-2;\ 4)$. ◁

Парабола обладает многими интересными свойствами, которые широко используются в технике. Например, на оси симметрии параболы есть точка F, которую называют **фокусом параболы** (рис. 39).

Если в этой точке находится источник света, то все отражённые от параболы лучи идут параллельно. Это свойство используется при изготовлении прожекторов, локаторов и других приборов.

Фокусом параболы $y = x^2$ является точка $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$.

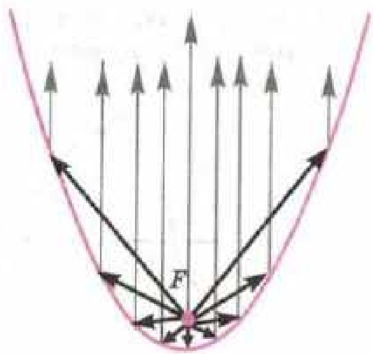


Рис. 39

## Устные вопросы и задания

1. Как называется график функции $y=x^2$?
2. При каких значениях $x$ функция $y=x^2$ принимает положительные значения?
3. В какой точке парабола $y=x^2$ касается оси абсцисс?
4. Почему график функции $y=x^2$ симметричен относительно оси ординат?
5. Какую точку называют вершиной параболы?
6. При каких значениях $x$ функция $y=x^2$ возрастает; убывает? Ответ обосновать.
7. Что такое фокус параболы?

## Вводные упражнения

1. Построить точки, симметричные точкам $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и $O$ относительно оси ординат (рис. 40).
2. Среди точек $A(-1;\ 3)$, $B(1;\ 5)$, $C(2;\ -4)$, $D(1;\ 3)$, $E(-1;\ 5)$ найти пары, симметричные относительно оси $Oy$.
3. Найти значение функции $y=x^2$ при $x=0{,}1$; $x=-1\frac{1}{2}$; $x=0$; $x=-\frac{1}{3}$.

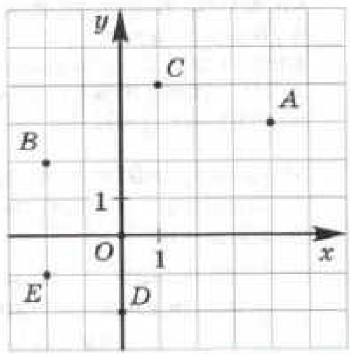


Рис. 40

4. Найти нули функции $y=x^2-3x-4$.
5. По графику функции $y=f(x)$ (рис. 41) найти:

   1) нули функции;

   2) значения $x$, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения;

   3) координаты точек, симметричных точкам $A$, $B$ и $C$ относительно оси ординат.

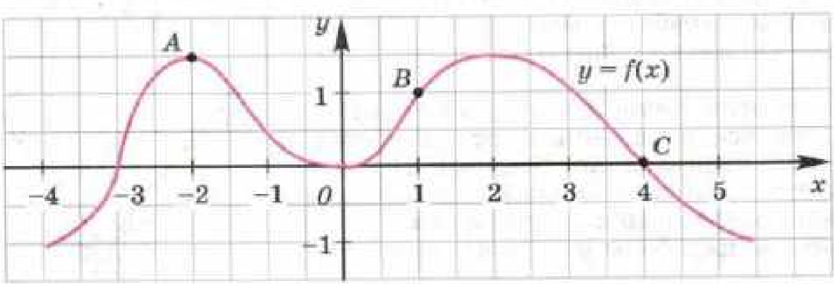


Рис. 41

6. Сравнить 1) абсциссы точек; 2) ординаты точек: $A_1$ и $A_2$; $A_3$ и $A_4$; $A_5$ и $A_6$ (рис. 42).

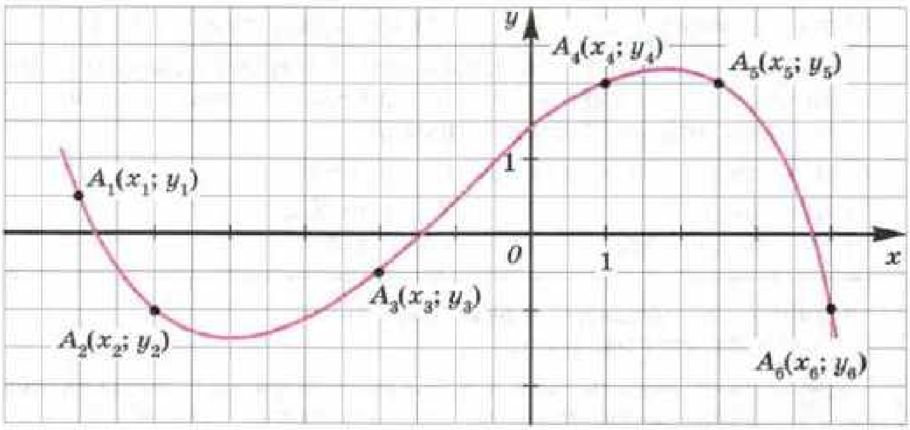



Рис. 42

## Упражнения

**586.** На миллиметровой бумаге построить график функции $y=x^2$. По графику приближённо найти:

1) значение $y$ при $x=0,8$; $x=1,5$; $x=1,9$; $x=-2,3$; $x=-1,5$;
2) значения $x$, если $y=2$; $y=3$; $y=4,5$; $y=6,5$.

**587.** Не строя графика функции $y=x^2$, определить, какие точки принадлежат ему: $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(12; 144)$, $D(-3; -9)$.

**588.** (Устно.) Найти координаты точек, симметричных точкам $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, $C(4; 15)$, $D(\sqrt{3}; 3)$ относительно оси ординат. Принадлежат ли все эти точки графику функции $y=x^2$?

**589.** (Устно.) Сравнить значения функции $y=x^2$ при:

1) $x=2,5$ и $x=3\frac{1}{3}$; 2) $x=0,4$ и $x=0,3$;
3) $x=-0,2$ и $x=-0,1$; 4) $x=4,1$ и $x=-5,2$.

**590.** Найти координаты точек пересечения параболы $y=x^2$ и прямой:

1) $y=25$; 2) $y=5$; 3) $y=-x$; 4) $y=2x$; 5) $y=3-2x$.

**591.** Является ли точка $A$ точкой пересечения параболы $y=x^2$ и прямой:

1) $y=-x-6$, $A(-3; 9)$; 2) $y=5x-6$, $A(2; 4)$?

**592.** С помощью графика убедиться в том, что функция $y=x^2$ возрастает:

1) на отрезке $[1;\ 4]$;
2) на промежутке $(2;\ 5)$;
3) на промежутке $x>3$;
4) на промежутке $[3;\ 4)$.

**593.** На одной координатной плоскости построить параболу $y=x^2$ и прямую $y=3$. При каких значениях $x$ точки параболы лежат выше прямой? ниже прямой?

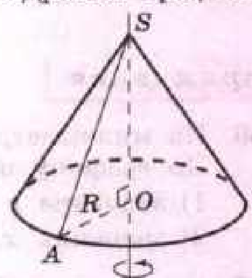
**594.** При каких $x$ значения функции $y=x^2$:

1) больше 9;
2) не больше 25;
3) не меньше 16;
4) меньше 36?

*Диалог об истории*

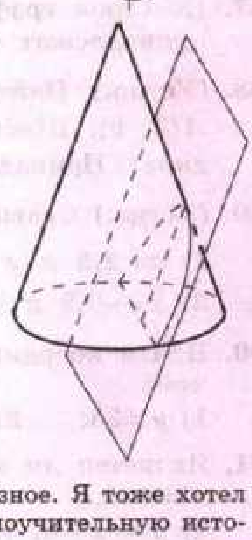
**Конические сечения, фокус параболы и легенда об Архимеде**

Хочу сказать, что и в вопросах изучения квадратичной функции не обошлось без математиков Древней Греции. Именно они открыли параболу, когда занимались пространственной геометрией.




А какое отношение плоская парабола имеет к объёмным телам?

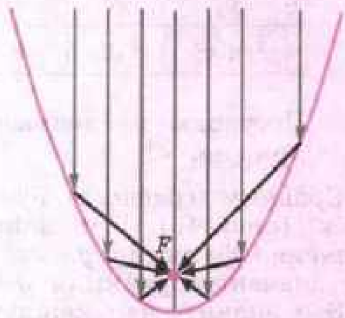
Вам, наверное, знакома такая фигура, как *конус* (см. рис.). Её можно получить вращением прямоугольного треугольника $AOS$ (угол $O$ — прямой) вокруг своего катета $SO$. Тогда гипотенуза $AS$ опишет так называемую коническую поверхность. При этом отрезок $AS$ называют *образующей* конуса. Так вот если конус рассечь плоскостью, параллельной его образующей, то по границе сечения получится линия, являющаяся параболой. Греки рассекали конус плоскостью под разными углами к образующей и изучали получающиеся *конические сечения*, давали им названия: эллипс, парабола, гипербола.



Вот пример из жизни. Когда мы с мамой резали морковь в салат (морковь по форме была похожа на конус), мама мне показывала, как нужно ставить нож, чтобы по границе сечения получалась окружность; эллипс; парабола...

Молодец твоя мама — не упускает случая рассказать дочери что-нибудь полезное. Я тоже хотел вам сегодня рассказать интересную и поучительную историю, связанную с *оптическим свойством* параболы (кстати, все конические сечения имеют свои оптические свойства).

По дошедшей до нас легенде Архимед построил вогнутые зеркала и с их помощью сжёг римские корабли. Многие учёные опровергают эту историю, потому что такие зеркала должны были иметь очень большие размеры, что было невозможно создать при том уровне техники. Расчёты Архимеда были основаны на утверждении, обратном тому, которое сформулировано в учебнике: любая прямая, параллельная оси симметрии параболы, после отражения от её поверхности проходит через фокус $F$ параболы. Поэтому если направить параболическое зеркало на Солнце (оно очень далеко, и солнечные лучи, попадающие на Землю, можно считать параллельными друг другу), то все отражённые лучи пройдут через одну точку — фокус параболы. И температура в этой точке будет настолько высокой, что там можно будет не только вскипятить воду, поджечь доску, но и расплавить свинец. Кстати, слово *фокус* на латинском языке означает *очаг, огонь*.




Раз слово «фокус» из латинского языка, значит, его придумал не Архимед?

Как называл Архимед эту замечательную точку параболы, я не знаю. История этого термина идёт от арабов, которые саму параболу называли зажигательным зеркалом, а её фокус — «местом зажигания». Европейцы этим термином стали пользоваться после публикации работы *Иоганна Кеплера (1571—1630)* «Оптическая астрономия» в 1604 г., где впервые встретилось слово «фокус».

## § 37 Функция $y = ax^2$

Зная свойства функции $y = x^2$ и вид её графика, не составит труда исследовать функцию $y = ax^2$ при $a > 0$ и $a < 0$. Для построения графика этой функции при различных значениях $a$ будут использованы приёмы сжатия или растяжения графика функции $y = x^2$ вдоль оси $Oy$, а также симметрия относительно оси $Ox$.

**Нужно вспомнить:**

- вид и название графика функции $y=x^2$;
- расположение оси симметрии параболы; координаты вершины параболы $y=x^2$;
- что означает возрастание функции $y=x^2$ на промежутке $x \geqslant 0$; убывание функции $y=x^2$ на промежутке $x \leqslant 0$;
- понятие фокуса параболы;
- координаты фокуса параболы $y=x^2$.

**Задача 1.** Построить график функции $y=2x^2$.

▶ Составим таблицу значений функции $y=2x^2$:

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=2x^2$ | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 |

Построим найденные точки и проведём через них плавную кривую. ◁

Сравним графики функций $y=2x^2$ и $y=x^2$ (рис. 43). При одном и том же $x$ значение функции $y=2x^2$ в 2 раза больше значения функции $y=x^2$.

Это значит, что каждую точку графика $y=2x^2$ можно получить из точки графика функции $y=x^2$ с той же абсциссой увеличением её ординаты в 2 раза.

Говорят, что график функции $y=2x^2$ получается **растяжением графика функции** $y=x^2$ от оси $Ox$ вдоль оси $Oy$ в 2 раза.

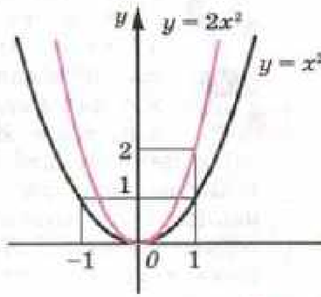


Рис. 43

**Задача 2.** Построить график функции $y=\frac{1}{2}x^2$.

▶ Составим таблицу значений функции $y=\frac{1}{2}x^2$:

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{1}{2}x^2$ | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 |

Построив найденные точки, проведём через них плавную кривую (рис. 44). ◁

Сравним графики функций $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=x^2$. Каждую точку графика $y=\frac{1}{2}x^2$ можно получить из точки графика функции $y=x^2$ с той же абсциссой уменьшением её ординаты в 2 раза.

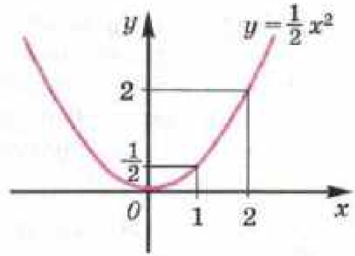



Рис. 44

Говорят, что график функции получается **сжатием графика функции** $y=x^2$ к оси $Ox$ вдоль оси $Oy$ в 2 раза.

**Задача 3.** Построить график функции $y=-x^2$.

▶ Сравним функции $y=-x^2$ и $y=x^2$. При одном и том же $x$ значения этих функций равны по модулю и противоположны по знаку. Следовательно, график функции $y=-x^2$ можно получить симметрией относительно оси $Ox$ графика функции $y=x^2$ (рис. 45). ◁

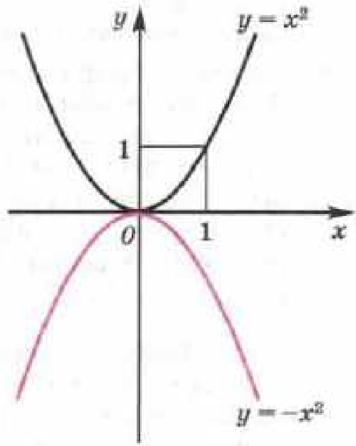



Рис. 45

Графики функций $y=-\frac{1}{2}x^2$ и $y=\frac{1}{2}x^2$ симметричны относительно оси $Ox$ (рис. 46).

**!** График функции $y=ax^2$ при любом $a\neq 0$ также называют **параболой**. При $a>0$ ветви параболы направлены **вверх**, а при $a<0$ — **вниз**.

Заметим, что фокус параболы $y=ax^2$ находится в точке $\left(0;\ \frac{1}{4a}\right)$.

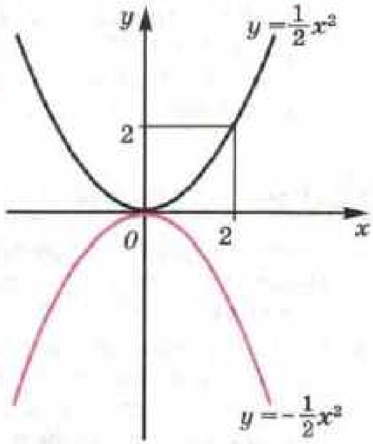



Рис. 46

Перечислим **основные свойства функции** $y=ax^2$, где $a\neq 0$.

1) Если $a>0$, то функция $y=ax^2$ принимает положительные значения при $x\neq 0$; если $a<0$, то функция $y=ax^2$ принимает отрицательные значения при $x\neq 0$; значение функции $y=ax^2$ равно 0 только при $x=0$.

2) Парабола $y = ax^2$ симметрична относительно оси ординат.
3) Если $a > 0$, то функция $y = ax^2$ возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$; если $a < 0$, то функция $y = ax^2$ убывает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$.

Все эти свойства видны на графиках (рис. 47, 48).

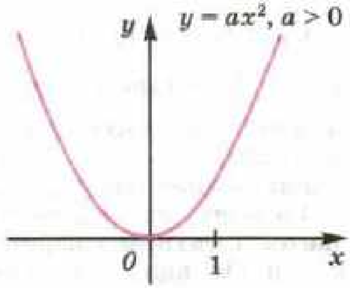



Рис. 47

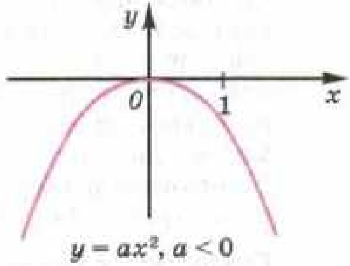



Рис. 48

**Задача 4.** На одной координатной плоскости построить графики функций $y = 2x^2$ и $y = 8$. С помощью этих графиков решить неравенство $2x^2 > 8$.

► Построим графики функций (рис. 49). Для того чтобы решить неравенство $2x^2 > 8$, нужно найти те значения $x$, при которых точки параболы $y = 2x^2$ лежат выше прямой $y = 8$.
Из рисунка 49 видно, что неравенство $2x^2 > 8$ верно при $x < -2$, а также при $x > 2$. ◁

**Задача 5.** Найти значение $a$, при котором одна из точек пересечения параболы $y = ax^2$ и прямой $y = 2x + 4$ имеет абсциссу $x = 2$.

► Из уравнения прямой $y = 2x + 4$ находим ординату точки пересечения: $y = 2 \cdot 2 + 4 = 8$. Подставляя $x = 2$, $y = 8$ в уравнение параболы $y = ax^2$, получаем $8 = a \cdot 2^2$, откуда $a = 2$. ◁

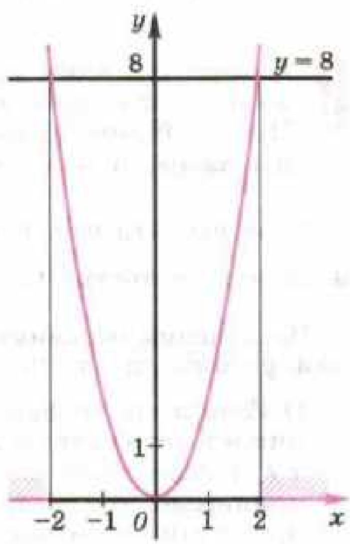



Рис. 49

## Устные вопросы и задания

1. Привести пример функции, график которой получается растяжением графика функции $y = x^2$ от оси $Ox$ вдоль оси $Oy$.
2. Привести пример функции, график которой получается сжатием графика функции $y = x^2$ к оси $Ox$ вдоль оси $Oy$.
3. Как называют график функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$?

4. Привести пример функции, графиком которой является парабола вида $y=ax^2$, ветви которой направлены вверх; вниз.
5. Перечислить основные свойства функции $y=ax^2$, если $a>0$; $a<0$.
6. Как с помощью графиков функций можно решить:
1) уравнение $3x^2=27$; 2) неравенство $3x^2<27$?

## Вводные упражнения

1. Сравнить значения функции $y=x^2$ при заданных значениях $x_1$ и $x_2$, если:
1) $x_1=-10$, $x_2=-15$; 2) $x_1=213$, $x_2=217$;
3) $x_1=1\frac{2}{3}$, $x_2=1\frac{3}{7}$; 4) $x_1=-3{,}28$, $x_2=-3{,}29$.
2. Для каждой из заданных точек назвать симметричную ей относительно оси $Oy$: $A(-2;\ 8)$; $B(3;\ 18)$; $C\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}\right)$; $D(-3;\ -9)$.
3. Сравнить значения выражения $5x^2$:
1) при $x=6$ и $x=7$; 2) при $x=-3$ и $x=-4$; 3) при $x=-2$ и $x=2$.

## Упражнения

**595.** На миллиметровой бумаге построить график функции $y=3x^2$. По графику приближённо найти:
1) значения $y$ при $x=-2{,}8$; $-1{,}2$; $1{,}5$; $2{,}5$;
2) значения $x$, если $y=9$; $6$; $2$; $8$; $1{,}3$.

**596.** (Устно.) Определить направление ветвей параболы:
1) $y=3x^2$; 2) $y=\frac{1}{3}x^2$; 3) $y=-4x^2$; 4) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

**597.** На одной координатной плоскости построить графики функций и, используя графики, выяснить, какие из этих функций возрастают на промежутке $x\geqslant 0$.
1) $y=x^2$ и $y=3x^2$; 2) $y=-x^2$ и $y=-3x^2$;
3) $y=3x^2$ и $y=-3x^2$; 4) $y=\frac{1}{3}x^2$ и $y=-\frac{1}{3}x^2$.

**598.** Найти $a$, если парабола $y=ax^2$ проходит через точку:
1) $A(-1;\ 1)$; 2) $B(2;\ 1)$; 3) $C(1;\ 1)$; 4) $D(3;\ -1)$.

**599.** С помощью графика функции $y=-2x^2$ решить неравенство:
1) $-2x^2\leqslant -8$; 2) $-2x^2>-18$; 3) $-2x^2\leqslant 1$; 4) $-2x^2\geqslant -32$.

**600.** При каких $x$ значения функции $y=3x^2$:
1) больше 12; 2) не больше 27;
3) не меньше 3; 4) меньше 75?

**601.** Найти координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y=2x^2$ и $y=3x+2$; 2) $y=-\frac{1}{2}x^2$ и $y=\frac{1}{2}x-3$.

**602.** Найти значение $a$, при котором одна из точек пересечения параболы $y=ax^2$ и прямой $y=5x-2$ имеет абсциссу $x=2$.

**603.** Найти значение $k$, при котором парабола $y=-5x^2$ и прямая $y=kx+6$ пересекаются в точке с абсциссой $x=2$. Имеются ли другие точки пересечения графиков?

**604.** Является ли убывающей на промежутке $x \leqslant 0$ функция:

1) $y=4x^2$; 2) $y=\frac{1}{4}x^2$; 3) $y=-5x^2$; 4) $y=-\frac{1}{5}x^2$?

**605.** Выяснить, является ли функция $y=-2x^2$ возрастающей или убывающей:

1) на отрезке $[-4; -2]$; 2) на интервале $(3; 5)$;
3) на полуинтервале $[-5; 0)$; 4) на полуинтервале $(-3; -2]$.

**606.** Путь, пройденный телом при равноускоренном движении, вычисляется по формуле $s=\frac{at^2}{2}$, где $s$ — путь в метрах, $a$ — ускорение в м/с$^2$, $t$ — время в секундах. Найти ускорение $a$, если за 8 с тело прошло путь, равный 96 м.

**607.** Пусть парабола $y=ax^2$ и прямая $y=kx+b$ имеют только одну общую точку и абсцисса этой точки равна $x_0$. Доказать, что эта прямая проходит через точку $\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$.

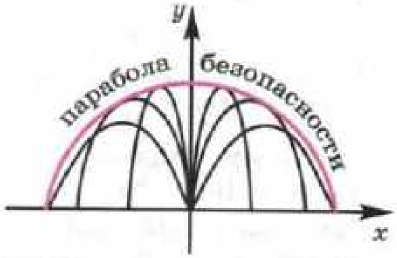
Это интересно

### Парабола безопасности

В начале изучения главы Вы говорили о том, что многие явления в природе и технике описываются с помощью квадратичных функций.

Я как раз хотел рассказать вам о любопытном свойстве парабол, известном всем артиллеристам. Траекторией движения снарядов интересовались в разные годы многие военные, техники и учёные. Особенно этот интерес возрос в XIII в., когда изобрели порох и снаряды стали летать дальше. Сперва военные применяли лишь *настильный огонь* (т. е. стреляли почти параллельно земле), а затем догадались применять *навесной огонь*, позволяющий стрелять даже из-за укрытия. Тогда же учёные доказали, что снаряды движутся по параболическим траекториям.

Всегда по параболическим? Независимо от того, под каким углом к горизонту (отличным от угла 90°) выпущен снаряд?




Да, изменяется лишь форма параболы. Если при заданной начальной скорости снаряда $v_0$ менять в одной вертикальной плоскости угол наклона $\alpha$ ствола пушки (находящейся в точке $O$), то при различных значениях этого угла получаются различные параболы. Все эти параболы касаются одной и той же параболы, называемой *параболой безопасности*.

Я понял, если точка $A$ находится вне области, ограниченной параболой безопасности, то при начальной скорости $v_0$ снаряд не попадёт в эту область ни при каком угле наклона пушки. К примеру, самолёты могут во время боевых действий безопасно летать над такой параболой.

## § 38 Функция $y = ax^2 + bx + c$

В этом параграфе вы убедитесь в том, что графиком любой функции вида $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ является парабола. Построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$ будет выполняться с помощью сдвигов параболы $y = ax^2$ вдоль координатных осей. Будут найдены координаты вершины параболы, являющейся графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

**Нужно вспомнить:**

- вид графика функции $y = ax^2$ при различных значениях $a$;
- понятия вершины и оси параболы;
- метод выделения полного квадрата;
- понятие нулей функции;
- формулы корней квадратного уравнения;
- нахождение значения функции при заданном значении аргумента.

**Задача 1.** Построить график функции $y = x^2 - 2x + 3$ и сравнить его с графиком функции $y = x^2$.

▶ Составим таблицу значений функции $y = x^2 - 2x + 3$:

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2 - 2x + 3$ | 18 | 11 | 6 | 3 | 2 | 3 | 6 |

Построим найденные точки и проведём через них плавную кривую (рис. 50).

Для сравнения графиков преобразуем формулу $y = x^2 - 2x + 3$, используя метод выделения полного квадрата: $y = x^2 - 2x + 1 + 2$, $y = (x-1)^2 + 2$. Сравним графики функций $y = x^2$ и $y = (x-1)^2$. Заметим, что если $(x_1;\ y_1)$ — точка параболы $y = x^2$, т. е. $y_1 = x_1^2$, то точка $(x_1 + 1;\ y_1)$ принадлежит графику функции $y = (x-1)^2$, так как $((x_1+1)-1)^2 = x_1^2 = y_1$. Следовательно, графиком функции $y = (x-1)^2$ является парабола, полученная из параболы $y = x^2$ **сдвигом** (параллельным переносом) вправо

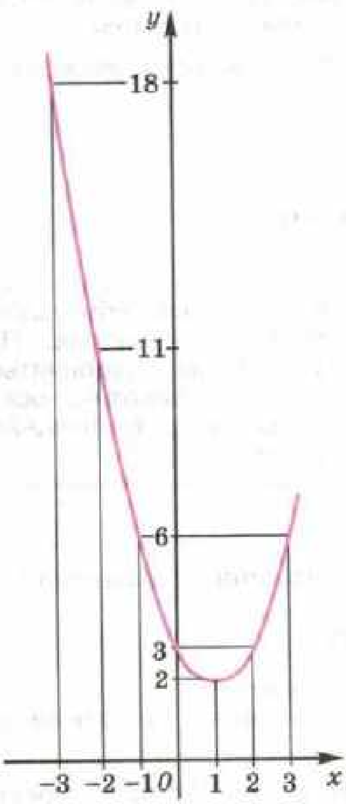



Рис. 50

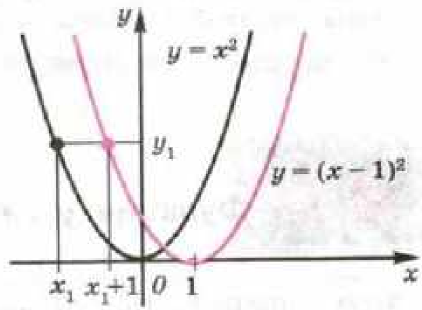



Рис. 51

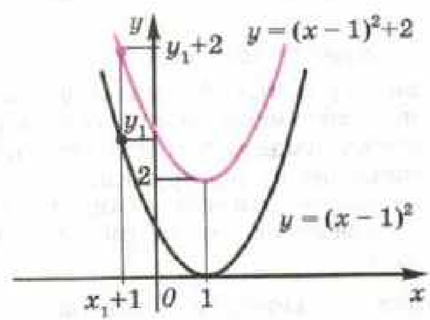



Рис. 52

на единицу (рис. 51). Теперь сравним графики функций $y=(x-1)^2$ и $y=(x-1)^2+2$. При каждом $x$ значение функции $y=(x-1)^2+2$ больше значения функции $y=(x-1)^2$ на 2. Следовательно, графиком функции $y=(x-1)^2+2$ является парабола, полученная сдвигом параболы $y=(x-1)^2$ вверх на две единицы (рис. 52).

Итак, графиком функции $y=x^2-2x+3$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y=x^2$ на единицу вправо и на две единицы вверх (рис. 53). Осью симметрии параболы $y=x^2-2x+3$ является прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы — точку (1; 2). ◁

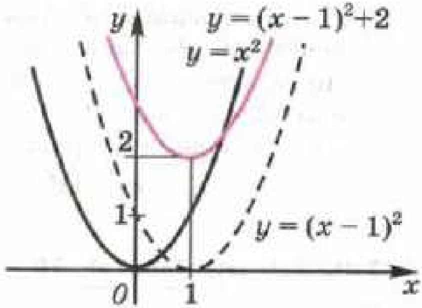


Рис. 53

Аналогично доказывается, что **графиком функции $y=a(x-x_0)^2+y_0$ является парабола**, получаемая сдвигом параболы $y=ax^2$:

- вдоль оси абсцисс вправо на $x_0$, если $x_0>0$, влево на $|x_0|$, если $x_0<0$;
- вдоль оси ординат вверх на $y_0$, если $y_0>0$, вниз на $|y_0|$, если $y_0<0$.

**Любую квадратичную функцию** $y=ax^2+bx+c$ с помощью выделения полного квадрата **можно записать в виде**

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

т. е. в виде $y=a(x-x_0)^2+y_0$, где $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=y(x_0)=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

**!** Таким образом, графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y=ax^2$ вдоль координатных осей. Равенство $y=ax^2+bx+c$ называют **уравнением параболы.** Координаты $(x_0;\ y_0)$ вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ можно найти по формулам

$$\boldsymbol{x_0=-\frac{b}{2a},\ \ y_0=y(x_0)=ax_0^2+bx_0+c.}$$

Ось симметрии параболы $y=ax^2+bx+c$ — прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы. Ветви параболы $y=ax^2+bx+c$ направлены вверх, если $a>0$, и направлены вниз, если $a<0$.

**Задача 2.** Найти координаты вершины параболы $y = 2x^2 - x - 3$.

▶ Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$. Ордината вершины параболы

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -3\frac{1}{8}.$$

Ответ. $\left(\frac{1}{4}; \ -3\frac{1}{8}\right)$. ◁

**Задача 3.** Записать уравнение параболы, если известно, что она проходит через точку $(-2; \ 5)$, а её вершиной является точка $(-1; \ 2)$.

▶ Так как вершиной параболы является точка $(-1; \ 2)$, то уравнение параболы можно записать в виде $y = a(x+1)^2 + 2$.

По условию точка $(-2; \ 5)$ принадлежит параболе, и, следовательно, $5 = a(-2+1)^2 + 2$, откуда $a = 3$. Таким образом, парабола задаётся уравнением

$$y = 3(x+1)^2 + 2, \text{ или } y = 3x^2 + 6x + 5. \ ◁$$

## Устные вопросы и задания

1. Пусть точка $A(x_1; \ y_1)$ принадлежит графику функции $y = x^2$. Определить, какая из точек:
   1) $B(x_1 - 3; \ y_1)$ или $C(x_1 + 3; \ y_1)$ принадлежит графику функции $y = (x+3)^2$;
   2) $B(x_1; \ y_1 - 5)$ или $C(x_1; \ y_1 + 5)$ принадлежит графику функции $y = x^2 + 5$.
2. Сравнить значения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при одном и том же значении аргумента, если:
   1) $f(x) = (x+2)^2$, $g(x) = (x+2)^2 - 4$;
   2) $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x-1)^2 + 3$.
3. Какие сдвиги параболы $y = x^2$ приводят к построению графика функции:
   1) $y = (x+7)^2$; 2) $y = (x-0{,}6)^2$; 3) $y = x^2 - \frac{1}{2}$;
   4) $y = x^2 + 1\frac{2}{3}$; 5) $y = (x-5)^2 + 4$; 6) $y = (x+4)^2 - 5$?
4. С помощью каких формул можно найти координаты вершины параболы?
5. Назвать координаты точки пересечения оси симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью абсцисс.
6. Что называют уравнением параболы?

## Вводные упражнения

**1.** Заполнить пропуски:

1) $x^2+10x+25=(\ldots)^2$; 2) $x^2-6x+\ldots=(x-3)^2$;
3) $x^2-\ldots+49=(x-7)^2$; 4) $x^2+\ldots+0{,}25=(x+0{,}5)^2$;
5) $(x+\ldots)^2=x^2+\ldots+64$; 6) $(x-\ldots)^2=x^2-\ldots+16$.

**2.** Выделить полный квадрат:

1) $x^2-4x+7$; 2) $x^2+3x+2$; 3) $4x^2+4x-5$; 4) $9x^2-6x-4$.

**3.** Определить для функции $y=-5x^2$ и $y=\frac{1}{8}x^2$:

1) направление ветвей параболы;
2) промежутки возрастания и убывания функции;
3) координаты вершины параболы.

**4.** Точка $A(3;\ y_1)$ принадлежит графику функции $y=x^2$. Установить, принадлежит ли точка $B(4;\ y_1)$ графику функции:

1) $y=(x-1)^2$; 2) $y=(x+1)^2$.

## Упражнения

Найти координаты вершины параболы **(608—610)**.

**608.** (Устно.)

1) $y=(x-3)^2-2$; 2) $y=(x+4)^2+3$;
3) $y=5(x+2)^2-7$; 4) $y=-4(x-1)^2+5$.

**609.** 1) $y=x^2+4x+1$; 2) $y=x^2-6x-7$;
3) $y=2x^2-6x+11$; 4) $y=-3x^2+18x-7$.

**610.** 1) $y=x^2+2$; 2) $y=-x^2-5$; 3) $y=3x^2-2x$; 4) $y=-4x^2+x$.

**611.** Найти на оси $Ox$ точку, через которую проходит ось симметрии параболы:

1) $y=x^2+3$; 2) $y=(x+2)^2$; 3) $y=-3(x+2)^2+2$;
4) $y=(x-2)^2+2$; 5) $y=x^2+x+1$; 6) $y=2x^2-3x+5$.

**612.** Проходит ли ось симметрии параболы $y=x^2-10x$ через точку: 1) (5; 10); 2) (3; −8); 3) (5; 0); 4) (−5; 1)?

**613.** Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

1) $y=x^2-3x+2$; 2) $y=-2x^2+3x-1$;
3) $y=3x^2-7x+12$; 4) $y=3x^2-4x$.

**614.** Написать уравнение параболы, если известно, что парабола проходит через точку (−1; 6), а её вершиной является точка (1; 2).

**615.** (Устно.) Принадлежит ли параболе $y=-3x^2+4x-7$ точка $(1;\ -6)$?

**616.** Найти значение $k$, если точка $(-1;\ 2)$ принадлежит параболе: 1) $y=kx^2+3x-4$; 2) $y=-2x^2+kx-6$.

**617.** С помощью шаблона параболы $y=x^2$ построить график функции:
1) $y=(x+2)^2$; 2) $y=(x-3)^2$; 3) $y=x^2-2$;
4) $y=-x^2+1$; 5) $y=-(x-1)^2-3$; 6) $y=(x+2)^2+1$.

**618.** Записать уравнение параболы, полученной из параболы $y=2x^2$:
1) сдвигом вдоль оси $Ox$ на 3 единицы вправо;
2) сдвигом вдоль оси $Oy$ на 4 единицы вверх;
3) сдвигом вдоль оси $Ox$ на 2 единицы влево и последующим сдвигом вдоль оси $Oy$ на единицу вниз;
4) сдвигом вдоль оси $Ox$ на 1,5 единицы вправо и последующим сдвигом вдоль оси $Oy$ на 3,5 единицы вверх.

**619.** Построить график функции:
1) $y=|x^2-2|$; 2) $y=|1-x^2|$;
3) $y=|2-(x-1)^2|$; 4) $y=|x^2-5x+6|$.

**620.** Записать уравнение параболы, пересекающей ось абсцисс в точках $x=-1$ и $x=3$, а ось ординат в точке $y=2$.

Шаг вперёд

### График функции $y=|ax^2+bx+c|$

Профессор, я не уверена, что правильно выполнила построение графиков в упражнении 619. В 7 классе Вы нам показывали, как строить графики функций $y=|x|$ и $y=|x+a|$. Можно ли и здесь применять те же идеи?

Давайте сначала поговорим о том, чем отличается график функции $y=f(x)$ от графика функции $y=|f(x)|$. Вы хорошо помните определение модуля числа?

Конечно. Модуль числа равен самому числу, если оно неотрицательно, и числу, ему противоположному, если оно отрицательно, т. е.

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

Замечательно. Допустим, график функции $y=f(x)$ изображён на рисунке а). При $x\leqslant -3$ и $-1\leqslant x\leqslant 5$ значения функции $y=f(x)$ неотрицательны, поэтому для этих значений $x$ график функции $y=|f(x)|$ будет таким же, как и график функции $y=f(x)$. При $-3<x<-1$ и $x>5$ значения $f(x)$ отрицательны, поэтому при этих значениях аргумента $|f(x)| = -f(x)$. Значит, на промежутках $-3 < x < -1$ и $x > 5$ график функции $y = |f(x)|$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением от оси $Ox$ (рис. б)).

Думаю, что теперь вы вспомнили, как из графика функции $y = x$ получали график функции $y = |x|$, а из графика функции $y = x + 3$ — график функции $y = |x + 3|$. Наверное, вспомнили, что о движении графика функции я вам тоже рассказывал.

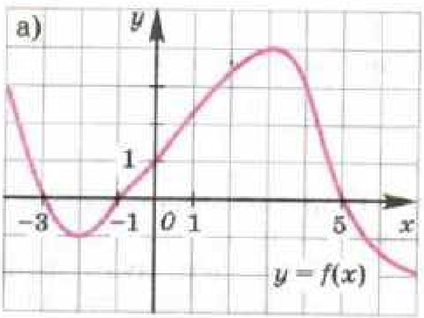
Я поняла, что нерационально (по точкам) выполняла построение графиков в упражнении 619. Давайте вместе построим график, например, такой функции: $y = |-x^2 + 6x - 5|$.

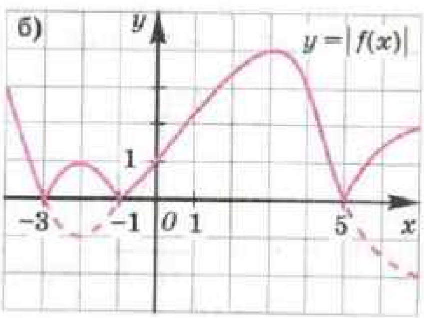
Только сначала преобразуем выражение под знаком модуля к виду, удобному для построения с помощью сдвигов:

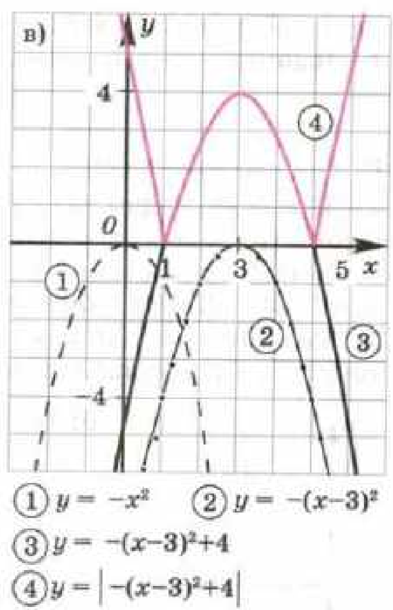
$$-x^2 + 6x - 5 = -(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 + 5) = -(x - 3)^2 + 4.$$

Рекомендую вам при построении графика с помощью сдвигов параболы $y = x^2$ использовать *шаблон* параболы, изготовленный, например, из картона. Только не забудьте, что исходной для построения вашего графика будет парабола $y = -x^2$, а не парабола $y = x^2$.

Я буду на рисунке в) нумеровать этапы построения графика функции $y = |-(x - 3)^2 + 4|$.



## § 39 Построение графика квадратичной функции

Построение графика квадратичной функции с помощью сдвигов параболы вдоль координатных осей вы освоили в предыдущем параграфе. В этом параграфе будет сформулирован алгоритм построения графика с помощью нескольких опорных точек. Будет рассмотрено решение задачи на нахождение наибольшего (наименьшего) значения квадратичной функции — задачи, имеющей большое прикладное значение.

**Нужно вспомнить:**

- формулы координат вершины параболы;
- построение оси симметрии параболы;
- определение направления ветвей параболы $y=ax^2+bx+c$ в зависимости от знака коэффициента $a$;
- понятие нулей функции;
- формулы корней квадратного уравнения;
- понятие возрастания (убывания) функции на промежутке;
- формулы площадей прямоугольника и треугольника.

**Задача 1.** Построить график функции $y=x^2-4x+3$.

▶ 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{-4}{2}=2,\ \ y_0=2^2-4\cdot 2+3=-1.$$

Построим точку $(2;\ -1)$.

2. Проведём через точку $(2;\ -1)$ прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы (рис. 54, *а*).

3. Решая уравнение $x^2-4x+3=0$, найдём нули функции: $x_1=1$, $x_2=3$. Построим точки $(1;\ 0)$ и $(3;\ 0)$ (рис. 54, *б*).

4. Возьмём две точки на оси $Ox$, симметричные относительно точки $x=2$, например точки $x=0$ и $x=4$. Вычислим значение


Рис. 54